## §1.2 线性方程组

## §1.3 矩阵和初等行变换

## §1.4 行简化阶梯矩阵

**定义 1.1.** 取定域$F$.

(1) 关于**未知量**$x_1, \ldots, x_n \in F$的方程组

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n = y_1 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n = y_m \end{cases} \tag{1.1}$$

称为**线性方程组**. 其中给定的$A_{ij}, y_i \in F$分别称为方程组的**系数**和**常数项**. 使得方程组成立的$x_1, \ldots, x_n$构成的向量$(x_1, \ldots, x_n) \in F^n$称为**方程组的解**. 方程组的所有解构成的$F^n$的子集称为**解空间**.

(2) 在方程组(1.1)中, 如果常数项$y_1 = \cdots = y_m = 0$, 则称该方程组为**齐次的**; 否则, 称该方程组为**非齐次的**. 零向量$(0, \ldots, 0)$总是齐次线性方程组的解, 称为**平凡解**.

可以从下面两个角度理解线性方程组:

- 考虑$F^m$中的向量

$$\alpha_j = (A_{1j}, \ldots, A_{mj}), \qquad 1 \le j \le n,$$
$$\beta = (y_1, \ldots, y_m).$$

则$(x_1, \ldots, x_n)$是解$\iff \beta = \sum_{j=1}^n x_j\alpha_j$. 所以方程组有解$\iff \beta \in \mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. 特别地, 如果$\mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = F^m$, 则方程组总有解. 另一方面, 齐次线性方程组只有平凡解$\iff \alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性无关.

- 考虑映射$T: F^n \to F^m$,

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n, \ldots, A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n) = \sum_{j=1}^n x_j\alpha_j.$$

则解空间为

$$T^{-1}(\beta) := \{\gamma \in F^n \mid T(\gamma) = \beta\}.$$

注意到$T$线性:

$$T(\gamma_1 + \gamma_2) = T(\gamma_1) + T(\gamma_2), \qquad T(c\gamma) = cT(\gamma).$$

这推出对于齐次线性方程组, 解空间$T^{-1}(0)$是$F^n$的(线性)子空间: $0 \in T^{-1}(0)$, 并且如果$\gamma_1, \gamma_2 \in T^{-1}(0)$, $c \in F$, 则$T(c\gamma_1 + \gamma_2) = cT(\gamma_1) + T(\gamma_2) = 0$, 因此$c\gamma_1 + \gamma_2 \in T^{-1}(0)$. 我们将考察解空间$T^{-1}(0)$的基和维数. 对于非齐次线性方程组, 如果解空间非空, 则它只是"仿射子空间". 具体地说, 如果$T^{-1}(\beta) \neq \varnothing$, 取$\gamma_0 \in T^{-1}(\beta)$, 则

$$T^{-1}(\beta) = \gamma_0 + T^{-1}(0) := \{\gamma_0 + \gamma : \gamma \in T^{-1}(0)\}.$$

下面介绍解线性方程组的Gauss消元法. 先看一个例子.

**例 1.1.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

我们分别用①和②表示这两个方程. ① + (−2)②得$-7x_2-7x_3=0$, 从而$x_2=-x_3$. 另一方面, ② + 3①得$7x_1+7x_3=0$, 从而$x_1=-x_3$. 因此, 如果$(x_1,x_2,x_3)$是解, 则$x_1=x_2=-x_3$. 反过来, 这样的$(x_1,x_2,x_3)$也一定是解. □

我们把方程

$$(c_1A_{11}+\cdots+c_mA_{m1})x_1+\cdots+(c_1A_{1n}+\cdots+c_mA_{mn})x_n=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$$

称为方程组(1.1)中$m$个方程的**线性组合**. 如果把(1.1)中的$m$个方程依次记为①, ..., ⓜ, 则记这个线性组合为$c_1$① + ⋯ + $c_m$ⓜ. 假设方程组

$$\begin{cases} B_{11}x_1+\cdots+B_{1n}x_n=z_1 \\ \qquad\cdots\cdots \\ B_{k1}x_1+\cdots+B_{kn}x_n=z_k \end{cases} \tag{1.2}$$

中每个方程都是方程组(1.1)中$m$个方程的线性组合. 则(1.1)的解一定是(1.2)的解. 进一步地, 如果(1.1)中的$m$个方程都是(1.2)中$k$个方程的线性组合, 则这两个方程组有相同的解(此时称这两个方程组**同解**). 称两个方程组**等价**, 如果每个方程组中任何一个方程都是另一个方程组中方程的线性组合. 上面说明了等价的方程组是同解的. Gauss消元法指: 寻找与待解方程组等价的方程组, 使得后者的系数中有尽量多的零. 为了简化记号, 我们引入矩阵的概念.

**定义 1.2.** 由$F$中元素构成的$m$行$n$列的表$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ & \vdots & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}$称为$F$上的$m\times n$**矩阵**. $A_{ij}$称为矩阵$A$的$(i,j)$**-元**.

- 矩阵$A$可以视为映射
$$\{(i,j)\mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}\to F,\qquad (i,j)\mapsto A_{ij}.$$
- 我们把所有$m\times n$矩阵构成的集合记为$F^{m\times n}$.
- 我们称$1\times n$矩阵为$n$维**行向量**, 称$m\times 1$矩阵为$m$维**列向量**.
- 我们把$n$维行向量等同为$n$维向量, 并把$1\times 1$矩阵等同为$F$中的元素. 从而$F^{1\times n}=F^n$, $F^{1\times 1}=F$.
- 矩阵的**行向量**和**列向量**的概念...

**定义 1.3.** 设$A,B\in F^{m\times n}$. 如果每个矩阵的每个行向量是另一矩阵的行向量的线性组合, 则称$A$ 与$B$**行等价**, 记为$A\sim B$. (**注意与教材不同!**)

容易看出, 行等价为$F^{m\times n}$上的等价关系: $A\sim A$; $A\sim B\Longrightarrow B\sim A$; $A\sim B, B\sim C\Longrightarrow C\sim A$.

对于方程组(1.1), 我们记

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ & \vdots & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}\in F^{m\times n},\qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\in F^{n\times 1},\qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix}\in F^{m\times 1},$$

并把方程组简记为$AX=Y$. $A$称为方程组的**系数矩阵**, $(A,Y)\in F^{m\times(n+1)}$称为方程组的**增广矩阵**. 设$(A,Y)=\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m\end{pmatrix}$, 其中$\alpha_i\in F^{n+1}$为增广矩阵的行向量. 则方程的线性组合$c_1$① + ⋯ +

$c_m$ $\textcircled{m}$对应行向量的线性组合$\sum_{i=1}^m c_i\alpha_i$. 这推出:

**命题 1.1.** 设$A, B \in F^{m\times n}$, $Y, Z \in F^{m\times 1}$. 则$(A, Y) \sim (B, Z) \Longleftrightarrow$方程组$AX = Y$与$BX = Z$等价. 特别地, 如果$A \sim B$, 则$AX = 0$与$BX = 0$同解.

为了用矩阵来实现Gauss消元法, 我们需要寻找与增广矩阵行等价的“简单”的矩阵. 特别地, 如果“简单”矩阵的第$j$列有一个矩阵元是1, 其他矩阵元都是0, 我们就认为对未知量$x_j$完成了消元. 为此, 引入下面的定义.

**定义 1.4.** (1) 一个矩阵称为是**行简化**的, 如果

- 每个非零行的第一个非零矩阵元(称为**主元**)都是1;
- 每个主元所在列的其余矩阵元都是0.

(2) 一个矩阵称为是**行简化阶梯矩阵**, 如果

- 它是行简化的;
- 零行都在最下方;
- 非零行主元的列指标随行指标的增大而增大.

**例 1.2.** 书上P8, 例5, 例6为行简化矩阵; $I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $0_{m\times n}$, P12的矩阵为行简化阶梯矩阵. 这里$I_n$称为$n$阶**单位矩阵**, 其中$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ 这里的$\delta_{ij}$称为Kronecker记号.

我们将证明:

**命题 1.2.** 任意$A \in F^{m\times n}$行等价于某个行简化阶梯矩阵.

对矩阵的行向量做一般的线性组合比较复杂, 并且不容易判断行等价性. 我们只需下面几类操作, 称为矩阵的**初等行变换**:

(1) 用某个非零元素$c \in F \setminus \{0\}$乘某行($\alpha_i \mapsto c\alpha_i$).

(2) 把一行的$c$倍加到另一行上($\alpha_i \mapsto \alpha_i + c\alpha_j, i \neq j$).

(3) 互换两行($\alpha_i \leftrightarrow \alpha_j, i \neq j$).

初等行变换可以视为映射$e : F^{m\times n} \to F^{m\times n}$.

**命题 1.3.** 初等行变换可逆, 并且逆仍为初等行变换. 从而$e(A) \sim A$.

**证明.** 若$e$为$\alpha_i \mapsto c\alpha_i$, 则$e^{-1}$为$\alpha_i \mapsto c^{-1}\alpha_i$. 若$e$为$\alpha_i \mapsto \alpha_i + c\alpha_j$, 则$e^{-1}$为$\alpha_i \mapsto \alpha_i - c\alpha_j$. 若$e$为$\alpha_i \leftrightarrow \alpha_j$, 则$e^{-1} = e$. □

**命题1.2的证明.** 先利用前两类初等行变换化为行简化矩阵: 逐行做, 先把非零行的主元变为1, 然后把所在列的其余矩阵元变为0. 然后交换行. □

下面给出解方程组$AX = Y$的过程, 其中$A \in F^{m\times n}, X \in F^{n\times 1}, Y \in F^{m\times 1}$.

- 利用初等行变换, 将增广矩阵$(A, Y)$化为行简化阶梯矩阵$(R, Z)$. 则$R$也是行简化阶梯矩阵. 此时, $AX = Y$与$RX = Z$同解.
- 设$R$的所有非零行为前$r$行($r \leq \min\{m, n\}$), 第$i$行($1 \leq i \leq r$)中的主元在第$k_i$列, $k_1 < \cdots <$

$k_r$. 记$J=\{1,\ldots,n\}\setminus\{k_1,\ldots,k_r\}$. 则方程组$RX=Z$为

$$\begin{cases} x_{k_1}+\sum_{j\in J}c_{1j}x_j=z_1 \\ \qquad\vdots \\ x_{k_r}+\sum_{j\in J}c_{rj}x_j=z_r \\ 0=z_{r+1} \\ \quad\vdots \\ 0=z_m \end{cases}$$

- 若$r<m$且$z_{r+1},\ldots,z_m$不全为0, 则方程组无解.
- 否则, 若$r=n$, 则$J=\varnothing$, $k_i=i$, 从而方程组有唯一解
$$(x_1,\ldots,x_n)=(z_1,\ldots,z_r).$$
- 否则, 解为
$$\begin{cases} x_{k_1}=z_1-\sum_{j\in J}c_{1j}x_j \\ \qquad\vdots \\ x_{k_r}=z_r-\sum_{j\in J}c_{rj}x_j \end{cases}$$
其中对$j\in J$, 未知量$x_j$在$F$中任意取值.

**定理 1.4.** 设$F\subset K$. 若$F$上的方程组$AX=Y$在$K$中有解, 则在$F$中也有解.

**证明.** 在$K$中有解 $\Longrightarrow$ "$z_{r+1}=\cdots=z_m=0$" $\Longrightarrow$ 在$F$中有解. □

下面讨论齐次线性方程组的解空间的基和维数.

- 对$j_0\in J$, 在解
$$\begin{cases} x_{k_1}=-\sum_{j\in J}c_{1j}x_j \\ \qquad\vdots \\ x_{k_r}=-\sum_{j\in J}c_{rj}x_j \end{cases} \tag{1.3}$$
中取$x_{j_0}=1$, $x_j=0$ $(j\in J\setminus\{j_0\})$, 得解
$$\alpha_{j_0}=(x_1,\ldots,x_n),$$
其中$x_{j_0}=1$, $x_j=0$ $(j\in J\setminus\{j_0\})$, $x_{k_i}=-c_{ij_0}$.
- 断言: $\{\alpha_j\mid j\in J\}$是解空间$T^{-1}(0)$的基, 从而$\dim T^{-1}(0)=|J|=n-r$. 事实上:
线性无关: 设$\sum_{j\in J}c_j\alpha_j=0$. 注意到$\sum_{j\in J}c_j\alpha_j$的第$j$个分量为$c_j (j\in J)$. 所以$c_j=0$.
生成解空间: 设$\alpha\in T^{-1}(0)$, $\alpha=(x_1,\ldots,x_n)$. 则(1.3)式成立. 这推出$\alpha=\sum_{j\in J}x_j\alpha_j$.

**定理 1.5.** 设$A\in F^{m\times n}, m<n$. 则齐次线性方程组$AX=0$有非平凡解.

**证明.** 解空间的维数$n-r=(n-m)+(m-r)>0$. □

**注 1.1.** 该定理等价于讲义中定理2.8.

最后, 我们证明上面给出的矩阵行等价的定义与教材的定义一致.

**命题 1.6.** 对$A,B\in F^{m\times n}$, TFAE:

(1) $A\sim B$.

(2) 存在有限个初等行变换$e_1,\ldots,e_k$使得$e_1\circ\cdots\circ e_k(A)=B$.

**证明.** "(1)$\Longrightarrow$(2)": 由命题1.2的证明, 存在初等行变换$f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s$使得

$$f_1 \circ \cdots \circ f_r(A) = R, \qquad g_1 \circ \cdots \circ g_s(B) = S,$$

其中$R, S$为行简化阶梯矩阵. 则$R \sim S$. 记$W \subset F^n$为$R$的行空间(即行向量生成的子空间). 则$W$也等于$S$的行空间. 容易看出:

- $R$和$S$的主元的列指标集可以由子空间$W$识别出来. 事实上, 这两个列指标集均为
$$\{1 \leq k \leq n : 存在(x_1, \ldots, x_n) \in W满足x_k = 1并且当1 \leq j < k时有x_j = 0\}.$$
从而$R$与$S$主元的位置相同.
- 利用行简化阶梯矩阵主元所在列的其余矩阵元都是0, 进一步看出$R = S$.

这推出$g_s^{-1} \circ \cdots \circ g_1^{-1} \circ f_1 \circ \cdots \circ f_r(A) = B$.

"(2)$\Longrightarrow$(1)": 显然. □

## §1.5 矩阵乘法

先考虑矩阵的加法和纯量乘法. 对$A, B \in F^{m\times n}$, $c \in F$, 定义$A + B, cA \in F^{m\times n}$为

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \qquad (cA)_{ij} = cA_{ij}.$$

与$F^n$类似, $F^{m\times n}$是线性空间. ($F^{1\times n} = F^n$, $F^{m\times 1} \cong F^m$.)

- $\dim F^{m\times n} = mn$: 对$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, 记$E_{ij} \in F^{m\times n}$为$(i, j)$-元为1而其他矩阵元均为0的矩阵. 则$\{E_{ij}\}$是基.
- 称$A \in F^{n\times n}$**对称**, 如果对任意$i, j \in \{1, \ldots, n\}$有$A_{ij} = A_{ji}$. $\{A \in F^{n\times n} \mid A对称\}$是$F^{n\times n}$的子空间, $\dim = n(n + 1)/2$.
- 设$F = \mathbb{C}$. 称$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$为**Hermite矩阵**或**自伴矩阵**, 如果对任意$i, j \in \{1, \ldots, n\}$有$A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A \text{ Hermite}\}$不是$\mathbb{C}^{n\times n}$的(复)子空间! (注意到$I_n$ Hermite, 而$\sqrt{-1}I_n$不Hermite.) 另一方面, 如果视$\mathbb{C}^{n\times n}$为实线性空间, 则Hermite矩阵构成实子空间. $\dim_{\mathbb{R}} = n^2$.

下面考虑矩阵乘法. 对$A \in F^{m\times n}$, 考虑线性映射

$$L_A : F^{n\times 1} \to F^{m\times 1}, \qquad L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

注意到: 若$\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$是$F^{n\times 1}$的标准基, 则$L_A(\epsilon_j)$为$A$的第$j$列.

**命题 1.7.** 对任意$T \in L(F^{n\times 1}, F^{m\times 1})$, 存在唯一的$A \in F^{m\times n}$使得$T = L_A$.

**证明.** 存在性: 取$A \in F^{m\times n}$使得其第$j$列为$T(\epsilon_j)$. 则对任意$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^{n\times 1}$, 有

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\epsilon_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\epsilon_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{mj}x_j \end{pmatrix} = L_A(\alpha).$$

所以$T = L_A$.

唯一性: 设$A \in F^{m\times n}$满足$T = L_A$. 则$A$的第$j$列$= L_A(\epsilon_j) = T(\epsilon_j)$. □

**定义 1.5.** 设$A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$. 考虑$L_A \circ L_B \in L(F^{p\times 1}, F^{n\times 1})$. 使得$L_A \circ L_B = L_C$的唯一的矩阵$C \in F^{m\times p}$称为$A$**与**$B$**的乘积**, 记为$C = AB$.

注意由定义有$L_A \circ L_B = L_{AB}$.

**命题 1.8.**

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \qquad 1 \le i \le m, 1 \le j \le p.$$

**证明.** 设$\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p\}$是$F^{p\times 1}$的标准基. 则$(AB)_{ij}$为$L_{AB}(\epsilon_j) = L_A(L_B(\epsilon_j))$的第$i$个分量. 而$L_B(\epsilon_j)$为$B$的第$j$列, 即$L_B(\epsilon_j) = \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix}$. 所以由$L_A$的定义有$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$. □

- 不是总能定义.
- 对$A, B \in F^{n\times n}$, 一般$AB \ne BA$.

**命题 1.9.** 对$A \in F^{m\times n}$, $X \in F^{n\times 1}$有$L_A(X) = AX$.

**证明.** 考虑$L_X \in L(F, F^n)$. 则$L_X(c) = cX$. 特别地, $L_X(1) = X$. 因此

$$L_A(X) = L_A(L_X(1)) = L_{AX}(1) = AX.$$

□

取$X = \epsilon_j$得: $A$的第$j$列$= L_A(\epsilon_j) = A\epsilon_j$.

**命题 1.10.** (1) 有定义时, $A(BC) = (AB)C$.

(2) 有定义时, $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$.

(3) 有定义时, 对任意$c \in F$有$c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

(4) 设$A \in F^{m\times n}$. 则$I_m A = AI_n = A$.

(5) 记$0_{m\times n} \in F^{m\times n}$为零矩阵. 对$A \in F^{m\times n}$, 有$0_{k\times m}A = 0_{k\times n}$, $A0_{n\times p} = 0_{m\times p}$.

**证明.** (1) $L_{A(BC)} = L_A \circ L_{BC} = L_A \circ (L_B \circ L_C) = (L_A \circ L_B) \circ L_C = L_{AB} \circ L_C = L_{(AB)C}$.

(4) 注意到$L_{I_m} = \mathrm{id}_{F^{m\times 1}}$, $L_{I_n} = \mathrm{id}_{F^{n\times 1}}$. 所以$L_{I_mA} = L_{I_m} \circ L_A = L_A$. 类似地, $L_{AI_n} = L_A \circ L_{I_n} = L_A$.

(2), (3), (5)显然. □

- 乘法结合律 $\Longrightarrow$ $ABC$有意义. 定义$A^k = A\cdots A$.

- 设$A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$. 若$B = (B_1, \dots, B_p)$, $B_j \in F^{n\times 1}$, 则$AB = (AB_1, \dots, AB_p)$. 事实上, $AB$的第$j$列为$(AB)\epsilon_j = A(B\epsilon_j) = AB_j$.
- 类似地, $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_m B \end{pmatrix}$, 其中$\alpha_i \in F^n$.
- 若$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, $\beta_i \in F^p$, 则$AB = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$, 其中$\gamma_i = \sum_{k=1}^n A_{ik}\beta_k$为$\beta_i$的线性组合. 回忆初等行变换就是对行向量做线性组合. 因此, 对$A$做初等行变换可以通过左乘矩阵$A \mapsto EA$来实现.

**注 1.2.** 上面最后几个性质是分块矩阵乘法的特殊情况.

**命题 1.11.** 设$e : F^{m\times\mathbb{N}} \to F^{m\times\mathbb{N}}$为初等行变换, 其中$F^{m\times\mathbb{N}} := \bigcup_{n=1}^\infty F^{m\times n}$. 则对任意$A \in F^{m\times\mathbb{N}}$有$e(A) = e(I_m)A$.

**证明.** 由上面的讨论, 存在$P \in F^{m\times m}$满足对任意$A \in F^{m\times\mathbb{N}}$有$e(A) = PA$. 取$A = I_m$得$P = e(I_m)$. □

**定义 1.6.** $E \in F^{m\times m}$称为**初等矩阵**, 如果存在初等行变换$e : F^{m\times\mathbb{N}} \to F^{m\times\mathbb{N}}$使得$E = e(I_m)$.

初等矩阵有下面三种:

(1) $e$为$\alpha_i \mapsto c\alpha_i$, $c \neq 0$. 则$e(I_m) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1)$.

(2) $e$为$\alpha_i \mapsto \alpha_i + c\alpha_j$, $i \neq j$. 则$e(I_m) = I_m + cE_{ij}$.

(3) $e$为$\alpha_i \leftrightarrow \alpha_j$, $i \neq j$. 则$e(I_m) = I_m + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$.

**推论 1.12.** 设$A, B \in F^{m\times n}$. TFAE:

(1) 存在初等行变换$e_1, \dots, e_k$使得$B = e_1 \circ \cdots \circ e_k(A)$.

(2) 存在$k$个$m \times m$初等矩阵的乘积$P = E_1 \dots E_k$满足$B = PA$.

**证明.** 只需注意到

$$e_1 \circ \cdots \circ e_k(A) = e_1(I_m)e_2 \circ \cdots \circ e_k(A) = e_1(I_m)e_2(I_m)e_3 \circ \cdots \circ e_k(A) = \cdots = e_1(I_m) \cdots e_k(I_m)A.$$

□

## §1.6 可逆矩阵

**定义 1.7.** 设$A \in F^{n\times n}$. 如果存在$B \in F^{n\times n}$使得$AB = BA = I_n$, 则称$A$**可逆**, 并称$B$为$A$的**逆矩阵**.

**命题 1.13.** 可逆矩阵的逆矩阵唯一.

**证明.** 设$A$可逆, $B_1$和$B_2$均为$A$的逆矩阵. 则$B_1A = AB_2 = I_n$. 于是

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2.$$

□

若$A$可逆, 记$A$的逆为$A^{-1}$.

- $A$可逆$\Longrightarrow A^{-1}$可逆, 并且$(A^{-1})^{-1} = A$.

- $A,B$可逆$\Longrightarrow AB$可逆, 并且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 类似地, 若干个可逆矩阵的乘积可逆.

下面从线性映射的角度理解可逆矩阵. 注意可逆线性映射的逆映射仍为线性映射.

**命题 1.14.** 对于$A\in F^{n\times n}$, 有: $A$可逆$\Longleftrightarrow L_A\in L(F^{n\times 1})$可逆. 此时, $(L_A)^{-1}=L_{A^{-1}}$.

**证明.**

$$\begin{aligned}
&L_A\text{可逆}\\
\Longleftrightarrow\ &\text{存在}T\in L(F^{n\times 1})\text{使得}L_A\circ T=T\circ L_A=\mathrm{id}_{F^{n\times 1}}\\
\Longleftrightarrow\ &\text{存在}B\in F^{n\times n}\text{使得}L_A\circ L_B=L_B\circ L_A=L_{I_n}\\
\Longleftrightarrow\ &\text{存在}B\in F^{n\times n}\text{使得}AB=BA=I_n\\
\Longleftrightarrow\ &A\text{可逆}.
\end{aligned}$$

此时, $(L_A)^{-1}=L_B=L_{A^{-1}}$. □

**命题 1.15.** 设$V,W$为有限维$F$-线性空间, $\dim V=\dim W$, $T\in L(V,W)$. 则$T$单$\Longleftrightarrow T$满.

**证明.** 设$\dim V=\dim W=n$. 取$V$的基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. 则

$$T\text{单}\Longleftrightarrow\{T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n\}\text{为}n\text{元集且线性无关}\Longleftrightarrow\{T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n\}\text{为}n\text{元集且生成}W\Longleftrightarrow T\text{满}.$$

□

注: 这也推出: $T$可逆$\Longleftrightarrow\{T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n\}$为$W$的基.

**推论 1.16.** 设$V$为有限维$F$-线性空间, $T,U\in L(V)$.

(1) 若$T\circ U$可逆, 则$T,U$均可逆.

(2) 若$T\circ U=\mathrm{id}_V$, 则$U\circ T=\mathrm{id}_V$, 从而$T,U$互逆.

**证明.** (1) $T\circ U$可逆$\Longrightarrow T$满$U$单$\Longrightarrow T,U$可逆.

(2) 设$T\circ U=\mathrm{id}_V$. 由(1)知$T$可逆. 所以

$$U\circ T=(T^{-1}\circ T)\circ(U\circ T)=T^{-1}\circ(T\circ U)\circ T=T^{-1}\circ T=\mathrm{id}_V.$$

□

**推论 1.17.** 设$A,B\in F^{n\times n}$.

(1) 若$AB$可逆, 则$A,B$均可逆.

(2) 若$AB=I_n$, 则$BA=I_n$, 从而$A,B$互为逆矩阵.

**证明.** (1) $AB$可逆$\Longrightarrow L_{AB}=L_A\circ L_B$可逆$\Longrightarrow L_A,L_B$可逆$\Longrightarrow A,B$可逆.

(2) $AB=I_n\Longrightarrow L_A\circ L_B=\mathrm{id}_{F^{n\times 1}}\Longrightarrow L_B\circ L_A=\mathrm{id}_{F^{n\times 1}}\Longrightarrow BA=I_n$. □

**推论 1.18.** 设$A_1,\ldots,A_k\in F^{n\times n}$. 则$A_1\cdots A_k$可逆$\Longleftrightarrow$每个$A_i$可逆.

**证明.** "$\Longleftarrow$": 显然.

"$\Longrightarrow$": 对$k$归纳. $k=2$已证. 设$k\geq 3$且$A_1\cdots A_k=(A_1\cdots A_{k-1})A_k$可逆. 则$A_1\cdots A_{k-1}$和$A_k$可逆. 再由归纳假设知$A_1,\ldots,A_{k-1}$可逆. □

**命题 1.19.** $A\in F^{n\times n}$可逆$\Longleftrightarrow A$的$n$个列向量构成$F^{n\times 1}$的基.

**证明.** 设$A=(A_1,\ldots,A_n)$. 则$A_j=L_A(\epsilon_j)$. 从而$A$可逆$\Longleftrightarrow L_A$可逆$\Longleftrightarrow\{A_1,\ldots,A_n\}$为$F^{n\times 1}$的基. □

类似地, 对$A\in F^{n\times n}$, 定义$R_A\in L(F^n)$为$R_A(\alpha)=\alpha A$. 则$R_{AB}=R_B\circ R_A$. 这推出$A$可

逆$\Longleftrightarrow R_A$可逆. 从而类似可证明:

**命题 1.20.** $A \in F^{n\times n}$可逆$\Longleftrightarrow A$的$n$个行向量构成$F^n$的基.

**证明.** 设$A = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$. 则$\alpha_i = R_A(\epsilon_i)$. 从而$A$可逆$\Longleftrightarrow R_A$可逆$\Longleftrightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$为$F^n$的基. □

与方程组的联系:

**命题 1.21.** 设$A \in F^{n\times n}$. TFAE:

(1) $A$可逆.

(2) 对任意$Y \in F^{n\times 1}$, 方程组$AX = Y$有唯一解.

(3) 齐次线性方程组$AX = 0$只有平凡解.

(4) 存在$Y \in F^{n\times 1}$, 使得方程组$AX = Y$有唯一解.

(5) 对任意$Y \in F^{n\times 1}$, 方程组$AX = Y$有解.

**证明.** (2) $\Longleftrightarrow L_A$可逆.

(3) $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(L_A) = \{0\} \Longleftrightarrow L_A$单.

(5) $\Longleftrightarrow L_A$满.

(4) $\Longleftrightarrow \exists Y \in F^{n\times 1}$使得$|(L_A)^{-1}(Y)| = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(L_A) = \{0\}$. □

- 初等矩阵可逆: 对初等矩阵$e(I)$, 考虑$e^{-1}(I)$. 注意到有$e(A) = e(I)A$. 从而$e(I)e^{-1}(I) = e(e^{-1}(I)) = I$, $e^{-1}(I)e(I) = e^{-1}(e(I)) = I$. 因此$e(I)$可逆并且$e(I)^{-1} = e^{-1}(I)$.

**引理 1.22.** 设$R \in F^{n\times n}$是行简化阶梯矩阵. 若$R$可逆, 则$R = I_n$.

**证明.** 若不然, 则$R$的最后一行为0. 这推出$RR^{-1}$的$(n,n)$-元为0, 矛盾. □

**定理 1.23.** 设$A \in F^{n\times n}$. TFAE:

(1) $A$可逆.

(2) $A$与$I_n$行等价.

(3) $A$是若干个初等矩阵的乘积.

**证明.** "(2)$\Longrightarrow$(3)"和"(3)$\Longrightarrow$(1)"显然. "(1)$\Longrightarrow$(2)": 取与$A$行等价的行简化阶梯矩阵$R$. 则存在初等矩阵$E_1, \dots, E_k$使得$R = E_1 \cdots E_k A$. 由$E_i$和$A$可逆推出$R$可逆. 由引理, $R = I_n$. □

**推论 1.24.** 设$A, B \in F^{m\times n}$. 则$A$与$B$行等价$\Longleftrightarrow$存在可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$使得$B = PA$. □

下面的结论可以帮助我们求矩阵的逆.

**推论 1.25.** 设$A \in F^{n\times n}$可逆, 初等行变换$e_1, \dots, e_k : F^{n\times\mathbb{N}} \to F^{n\times\mathbb{N}}$满足$e_1 \circ \cdots \circ e_k(A) = I_n$. 则$e_1 \circ \cdots \circ e_k(I_n) = A^{-1}$.

**证明.** 记$E_i = e_i(I_n)$, $P = E_1 \cdots E_k$. 则对任意$B \in F^{n\times n}$有$e_i(B) = E_i B$, 从而

$$e_1 \circ \cdots e_k(B) = E_1 \cdots E_k B = PB.$$

取$B = A$和$B = I_n$得

$$e_1 \circ \cdots e_k(A) = PA, \qquad e_1 \circ \cdots e_k(I_n) = P.$$

条件推出$PA = I_n$, 从而$A^{-1} = P = e_1 \circ \cdots \circ e_k(I_n)$. □

**推论 1.26.** 设$A \in F^{n\times n}$, $(A, I_n)$与$(R, B)$行等价.

(1) 若存在非空列指标集$J \subset \{1, \ldots, n\}$使得对任意$i \geq |J|$和$j \in J$有$R_{ij} = 0$, 则$A$不可逆.

(2) 若$R = I_n$, 则$A$可逆并且$A^{-1} = B$.

**证明.** 条件推出$A \sim R$. 因此$A$可逆$\iff R$可逆.

(1) 只需证$R$不可逆. 通过对$R$右乘若干次形如$I_m + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$的初等矩阵(相当于交换$R$的列), 不妨设$J = \{1, \ldots, k\}$. 于是把$R$化为行简化阶梯矩阵后, 最后一行为0. 因此不可逆.

(2) 显然$A$可逆. 由$(A, I_n) \sim (R, B)$得存在可逆矩阵$P \in F^{n\times n}$满足$P(A, I_n) = (I_n, B)$, 即$PA = I_n, PI_n = B$. 这推出$A^{-1} = B$. □

**注 1.3.** 上面的结果给出了"判断矩阵是否可逆, 当可逆时求出逆矩阵"的算法: 对$(A, I_n)$进行初等行变换, 试图将它化为行简化阶梯矩阵. 如果在操作过程中出现了形如$(R, B)$的矩阵, 其中$R$满足(1), 则$A$不可逆. 否则, 最后得到的行简化阶梯矩阵将形如$(I_n, B)$, 此时$A$可逆, 并且$A^{-1} = B$.

**习题 1.6.** 设$F$为任意域.

1. 设$A \in F^{n\times n}$. 假设存在指标集$I, J \subset \{1, \ldots, n\}$满足$|I| + |J| > n$, 并且对任意$i \in I$和$j \in J$有$A_{ij} = 0$. 证明$A$不可逆.
2. 给定$F^n$的基$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, 证明$A \in F^{n\times n}$可逆的充分必要条件是$\{\alpha_1 A, \ldots, \alpha_n A\}$ 是$F^n$的基.
3. 证明$F^F$的$n$元子集$\{f_1, \ldots, f_n\}$线性无关的充分必要条件是存在$x_1, \ldots, x_n \in F$使得矩阵
$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$
可逆.