§2.4 坐标

定义 2.1. 设V是有限维F-线性空间. 如果$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$互不相同, 并且集合$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的基, 则称$n$元有序组$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$为$V$的**有序基**.

为了与教材记号一致, 当无歧义时, 我们对有序基也采用集合的记号, 即称$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$为有序基.

命题 2.1. 设V是有限维线性空间, $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的有序基. 则任意$\alpha\in V$表为线性组合$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$的方式唯一, 即

$$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=\sum_{i=1}^n x_i'\alpha_i \qquad\Longrightarrow\qquad x_i=x_i'.$$

证明. 若$\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=\sum_{i=1}^n x_i'\alpha_i$, 则$\sum_{i=1}^n (x_i-x_i')\alpha_i=0$. 由于$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$线性无关, 所以$x_i-x_i'=0$. □

定义 2.2. 上面命题中的系数x_i称为向量α关于有序基$\mathcal{B}$的**第i个坐标**, n维列向量$[\alpha]_{\mathcal{B}}:=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$称为$\alpha$关于有序基$\mathcal{B}$的**坐标**.

我们可以利用最自然的方式定义“形式矩阵乘法”. 此时有

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

坐标的概念给出了一个映射

$$\Gamma_{\mathcal{B}}:V\to F^{n\times 1},\qquad \Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

它有下面的性质:

- 单: 设$\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=\Gamma_{\mathcal{B}}(\beta)$. 如果$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$, $\beta=\sum_{i=1}^n y_i\alpha_i$, 则

  $$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=\Gamma_{\mathcal{B}}(\beta)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

  这说明$x_i=y_i$. 因此$\alpha=\beta$.
- 满: 对任意$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in F^{n\times 1}$, 取$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$, 则$\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.
- 保持线性结构: $\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)+\Gamma_{\mathcal{B}}(\beta)=\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha+\beta)$, $\Gamma_{\mathcal{B}}(c\alpha)=c\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)$.

这样的映射$\Gamma_{\mathcal{B}}$称为线性同构. 此时我们称V与$F^{n\times 1}$同构, 记为$V\cong F^{n\times 1}$. 同构的线性空间有很多相同的性质. 为什么不只研究$F^{n\times 1}$或F^n? 因为很多自然出现的线性空间没有占特殊地位的基, 不依赖于基的选取的性质更说明问题的本质.

例 2.1. $V=F^{n\times 1}$, $\mathcal{B}=\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}$. 则对$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$有$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\epsilon_i$, 即$\alpha$的第$i$个坐标为$x_i$. 这说明$\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=[\alpha]_{\mathcal{B}}=\alpha$, 即$\Gamma_{\mathcal{B}}=\mathrm{id}$. □

设$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$是$V$的另一组有序基. 设$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\alpha_i$, 并记

$$P = (P_1, \dots, P_n) = (P_{ij}) \in F^{n\times n},$$

其中$P_j \in F^{n\times 1}$. 则$P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$. 在形式矩阵乘法下, 有

$$\begin{aligned}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) &= \big((\alpha_1, \dots, \alpha_n)[\alpha'_1]_{\mathcal{B}}, \dots, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)[\alpha'_n]_{\mathcal{B}}\big)\\ &= \big((\alpha_1, \dots, \alpha_n)P_1, \dots, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P_n\big)\\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P.\end{aligned}$$

引理 2.2. 设$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$是$V$的有序基, $P \in F^{n\times n}$, $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P$. 则$\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$是基$\Longleftrightarrow P$可逆.

证明.

$$\begin{aligned}\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}\text{是基} \quad &\Longleftrightarrow \quad \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}\text{线性无关}\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{对}X \in F^{n\times 1}\text{有“}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)X = 0 \Longrightarrow X = 0\text{”}\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{对}X \in F^{n\times 1}\text{有“}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)PX = 0 \Longrightarrow X = 0\text{”}\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{对}X \in F^{n\times 1}\text{有“}PX = 0 \Longrightarrow X = 0\text{”}\\ &\Longleftrightarrow \quad P\text{可逆}.\end{aligned}$$

□

定理 2.3. 设$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$和$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$是$V$的有序基, $P \in F^{n\times n}$满足

$$(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P.$$

则P可逆, 并且

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}, \qquad [\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}, \qquad \forall\ \alpha \in V. \tag{2.1}$$

证明. 由引理, P可逆. 对$\alpha \in V$我们有

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)[\alpha]_{\mathcal{B}} = \alpha = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \big((\alpha_1, \dots, \alpha_n)P\big)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)(P[\alpha]_{\mathcal{B}'}).$$

由于$\alpha_1, \dots, \alpha_n$线性无关, 这推出$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$. 进一步得$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$. □

命题 2.4. 设$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$是$V$的有序基, $P \in F^{n\times n}$可逆. 则存在唯一有序基$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$满足(2.1)式.

证明. 存在性: 取$(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P$即可.

唯一性: 在(2.1)式中取$\alpha = \alpha'_j$得

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = P[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} = P\epsilon_j = P_j,$$

即$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\alpha_i$. □

例 2.2. 设$V = F^n$, $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. 若$\alpha = (x_1, \dots, x_n)$, 则$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 设$P \in F^{n\times n}$, $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)P$, 即

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\epsilon_i = (P_{1j}, \dots, P_{nj}).$$

(注意$(P_{1j}, \dots, P_{nj})$对应P的第j列.) 则

$$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}\text{是有序基} \Longleftrightarrow P\text{可逆}.$$

此时, 若$\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$, 则$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 例如: $V = \mathbb{R}^2$, $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 则$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 此时, $\alpha_1' = (\cos\theta, \sin\theta)$和$\alpha_2' = (-\sin\theta, \cos\theta)$(分别对应$P$的两列)构成基, 就是标准基旋转$\theta$角. 若$\alpha = (x_1, x_2)$, 则

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad [\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

□

§2.5 矩阵的行空间

定义 2.3. 设$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$. 则$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F^n$称为$A$的**行向量**,

$$\mathrm{row}(A) := \mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$$

称为A的**行空间**,

$$\mathrm{rowrank}(A) := \dim \mathrm{row}(A)$$

称为A的**行秩**.

我们可以对列做类似的定义.

命题 2.5. 设$A, B \in F^{m\times n}$.

(1) 若$B = PA$, 则$\mathrm{row}(B) \subset \mathrm{row}(A)$.

(2) 若$B = PA$并且P可逆, 则$\mathrm{row}(B) = \mathrm{row}(A)$.

(3) B与A行等价$\Longleftrightarrow \mathrm{row}(B) = \mathrm{row}(A)$.

证明. (1) 设$A \in F^{m\times n}, B \in F^{k\times n}, P \in F^{k\times m}$. 设$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$. 则

$$\beta_i = \sum_{j=1}^m P_{ij}\alpha_j \in \mathrm{row}(A) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{row}(B) \subset \mathrm{row}(A).$$

(2) 由(1)显然.

(3) 显然. □

命题中的(3)推出, 为了研究$\mathrm{row}(A)$, 只需研究与A行等价的行简化阶梯矩阵R的行空间$\mathrm{row}(R)$.

命题 2.6. 设$R \in F^{m\times n}$为行简化阶梯矩阵, 则R的非零行构成$\mathrm{row}(R)$的基.

证明. 设$R=\begin{pmatrix}\rho_1\\ \vdots\\ \rho_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, 其中$\rho_i\in F^n\setminus\{0\}$. 只需证$\rho_1,\dots,\rho_r$线性无关. 设$\sum_{i=1}^r c_i\rho_i=0$. 假设$\rho_i$中主元在第$k_i$列. 则$\sum_{i=1}^r c_i\rho_i$的第$k_i$个分量为$c_i$. 因此$c_i=0$. □

对于$A\in F^{m\times n}$, 记

$$\mathrm{Ker}(A):=\{X\in F^{n\times 1}\mid AX=0\},$$

称为A的**核**. 它就是方程组$AX=0$的解空间.

推论 2.7. 对$A\in F^{m\times n}$有

$$\dim\mathrm{Ker}(A)+\mathrm{rowrank}(A)=n.$$

证明. 由于行等价的矩阵具有相同的核和行空间, 不妨设A是行简化阶梯矩阵. 设A中有r个非零行. 则$\dim\mathrm{Ker}(A)=n-r$, $\mathrm{rowrank}(A)=r$. □

命题 2.8. 取定正整数m,n. 设$W\subset F^n$是子空间, $\dim W\le m$. 则存在唯一的行简化阶梯矩阵$R\in F^{m\times n}$使得$\mathrm{row}(R)=W$.

证明. 存在性: 取$\alpha_1,\dots,\alpha_m\in W$使得$\mathrm{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}=W$. (例如, 可以取$W$的基$\{\alpha_1,\dots,\alpha_{\dim W}\}$, 并取$\alpha_{\dim W+1}=\cdots=\alpha_m=0$.) 设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\in F^{m\times n}$, R为与A行等价的行简化阶梯矩阵. 则$\mathrm{row}(R)=\mathrm{row}(A)=W$.

唯一性: 设$R,R'\in F^{m\times n}$为行简化阶梯矩阵, $\mathrm{row}(R)=\mathrm{row}(R')$. 我们需要证明$R=R'$. 设$R=\begin{pmatrix}\rho_1\\ \vdots\\ \rho_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, R'=\begin{pmatrix}\rho'_1\\ \vdots\\ \rho'_{r'}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, 其中$\rho_i,\rho'_{i'}\neq 0$. 设$\rho_i$中主元在第$k_i$列, $k_1<\cdots<k_r$. 则对任意$1\le i'\le r'$有$\rho'_{i'}\in\mathrm{span}\{\rho_1,\dots,\rho_r\}$, 从而形如$\rho'_{i'}=\sum_{i=1}^r c_i\rho_i$. 设$i_0$是使$c_{i_0}\neq 0$得最小指标. 则$\rho'_{i'}$的主元在第$k_{i_0}$列. 这说明$R'$的主元所在列必为$R$的主元所在列. 由对称性, 反过来也对. 因此$R$与$R'$的主元位置相同. 特别地, $r=r'$. 我们继续考察等式$\rho'_{i'}=\sum_{i=1}^r c_i\rho_i$. 注意到$\rho'_{i'}$的第$k_{i'}$个分量为1, 当$i\neq i'$时第$k_i$个分量为0. 而$\sum_{i=1}^r c_i\rho_i$的第$k_i$列为$c_i$. 因此$c_i=\delta_{ii'}$. 这推出$\rho'_{i'}=\rho_{i'}$. □

注 2.1. 从上面的证明容易看出, 主元所在列

$$\{k_1,\dots,k_r\}=\{k\in\{1,\dots,n\}\mid \text{存在}(a_1,\dots,a_n)\in W\text{满足}a_k=1, \text{并且当}j<k\text{时有}a_j=0\}.$$

推论 2.9. 对任意$A\in F^{m\times n}$, 存在唯一的行简化阶梯矩阵$R\in F^{m\times n}$与A行等价.

证明. 存在性显然. 唯一性: 如果行简化阶梯矩阵$R,R'\in F^{m\times n}$都与A行等价, 则$\mathrm{row}(R)=\mathrm{row}(A)=\mathrm{row}(R')\Longrightarrow R=R'$. □

推论 2.10. 设$A, B \in F^{m\times n}$. 则存在一系列初等行变换将A化为$B \Longleftrightarrow \mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(B)$.

证明. "$\Longrightarrow$"显然. "$\Longleftarrow$": 设一系列初等行变换将A化为行简化阶梯矩阵R, 另一系列初等行变换将B化为行简化阶梯矩阵R'. 则$\mathrm{row}(R) = \mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(B) = \mathrm{row}(R') \Longrightarrow R = R'$. 注意到初等行变换可逆, 因此存在一系列初等行变换将R化为B. □

§2.6 涉及子空间的计算

很多时候会遇到下面的具体问题: 给定$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F^n$. 记$W = \mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$是否线性无关? $\dim W = ?$
- 给定$\beta \in F^n$. 是否$\beta \in W$? 如果是, 将β表示为$\beta = \sum_{i=1}^m x_i\alpha_i$.
- 刻画W, 即将W表示为$W = \{(b_1, \ldots, b_n) \in F^n \mid b_1, \ldots, b_n$满足某些条件$\}$的形式.

方法一. 设$\alpha_i = (A_{i1}, \ldots, A_{in})$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$. 则:

- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$线性无关$\Longleftrightarrow$

$$\text{``}\left(\sum_{i=1}^m A_{i1}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^m A_{in}x_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i\alpha_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_i = 0\text{''}$$

$$\Longleftrightarrow A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0\text{只有平凡解.}$$

(这里$A^t \in F^{n\times m}$为A的**转置矩阵**, 即$(A^t)_{ij} = A_{ji}$.) 这可以通过对A^t做初等行变换来解决(相当于对A做初等列变换).

- 类似地, $\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in W \Longleftrightarrow A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$有解. 进一步可以给出子空间$W$的刻画.
- 利用上节的结果, 若$A \sim R$(行简化阶梯), 则R的非零行为$\mathrm{row}(A) = W$的基. 这也给出$\dim W$.

上述方法需要对A和A^t都做初等行变换. 下面的方法虽然本质相同, 但提供了理解问题的另一个角度.

方法二. 对A做初等行变换, 得$A \sim R$(行简化阶梯), 则$W = \mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(R)$. 这推出:

- $\dim W = R$的非零行的个数. 特别地, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$线性无关$\Longleftrightarrow R$无零行.
- 若$R = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\rho_i \neq 0$, 则$\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$是$W$的基.

下面考虑“给定$\beta \in F^n$. 是否$\beta \in W$? 如果是, 将β表示为$\beta = \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i$”的问题. 设$\rho_i$中主元在第$k_i$列, $k_1 < \cdots < k_r$. 记$J = \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_r\}$. 设$\beta = (b_1, \ldots, b_n)$. 则

$$\begin{aligned} b \in W \qquad &\iff \qquad \text{存在} c_1, \ldots, c_r \in F \text{使得} \beta = \sum_{i=1}^r c_i \rho_i \\ &\iff \qquad \text{存在} c_1, \ldots, c_r \in F \text{使得对任意} 1 \le j \le n \text{有} b_j = \sum_{i=1}^r c_i R_{ij}. \end{aligned}$$

这推出对$1 \le i \le r$有$b_{k_i} = c_i$ (注意$R_{ik_i} = 1$, 当$i' \neq i$时$R_{i'k_i} = 0$). 所以

$$b_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} R_{ij} = \sum_{1 \le i \le r, k_i < j} b_{k_i} R_{ij}, \qquad \forall\, j \in J.$$

反过来, 如果上式成立, 则$c_i = b_{k_i}$满足对任意$1 \le j \le n$有$b_j = \sum_{i=1}^r c_i R_{ij}$. 这就证明了

$$W = \{(b_1, \ldots, b_n) : b_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} R_{ij}, \forall j \in J\}.$$

注意这里有$n - r$个式子. 当$\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in W$时, 有

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i} \rho_i = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_r}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-r\text{个}}) R = \big((b_{k_1}, \ldots, b_{k_r}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-r\text{个}}) P\big) A,$$

其中$P \in F^{m \times m}$为使$PA = R$的可逆矩阵(一般不唯一). 设

$$(x_1, \ldots, x_n) = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_r}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-r\text{个}}) P,$$

即$x_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} P_{ij}$. 则

$$\beta = (x_1, \ldots, x_n) A = \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i.$$

求矩阵P的方法: 若$(A, I) \sim (R, P)$, 则$R = PA$. 原因:

$$\begin{aligned} (A, I) \sim (R, P) \qquad &\Longrightarrow \qquad \text{存在可逆} Q \in F^{m \times m} \text{使得} Q(A, I) = (R, P) \\ &\Longrightarrow \qquad QA = R, Q = P \\ &\Longrightarrow \qquad PA = R, P \text{可逆}. \end{aligned}$$

例 2.3. (P60例21) 考虑$\mathbb{R}^4$. 设

$$\alpha_1 = (1, 2, 2, 1), \qquad \alpha_1 = (0, 2, 0, 1), \qquad \alpha_1 = (-2, 0, -4, 3).$$

方法一.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

方程组$A^t\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta^t=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}$的增广矩阵

$$(A^t,\beta^t)\sim\begin{pmatrix}1&0&0&b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{2}{3}b_4\\0&1&0&-b_1+\frac{5}{6}b_2-\frac{2}{3}b_4\\0&0&1&-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_4\\0&0&0&-2b_1+b_3\end{pmatrix}.$$

有解的条件为$2b_1=b_3$. 因此

$$W=\{(b_1,b_2,b_3,b_4):2b_1=b_3\}.$$

当$\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in W$时, 令

$$\begin{cases}x_1=b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{2}{3}b_4\\x_2=-b_1+\frac{5}{6}b_2-\frac{2}{3}b_4\\x_3=-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_4\end{cases},$$

则$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$. 另一方面, 由于$A^t\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 方程组$A^tX=0$只有平凡解, 这推出$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关, 从而$\dim W=3$.

方法二. 计算得$(A,I)\sim(R,P)$, 其中

$$R=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-6&0\\-2&5&-1\\4&-4&2\end{pmatrix}.$$

由R的形状得$k_1=1,k_2=2,k_3=4,r=3,J=\{3\}$. 由此得$\dim W=3$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关, 并且

$$W=\{(b_1,b_2,b_3,b_4):b_3=\sum_{i=1}^{3}b_{k_i}R_{i3}=2b_1\}.$$

当$\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in W$时, 取

$$(x_1,x_2,x_3)=(b_1,b_2,b_4)P=\frac{1}{6}(b_1,b_2,b_4)\begin{pmatrix}6&-6&0\\-2&5&-1\\4&-4&2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}(6b_1-2b_2+4b_4,-6b_1+5b_2-4b_4,-b_2+2b_4).$$

则$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$. □