§2.1 线性空间

取定域F和正整数n. 对于$x_1,\dots,x_n\in F$, 称n元有序组$(x_1,\dots,x_n)$为域F上的n**维向量**或n**维F-向量**, 并称每个x_i为该向量的一个**分量**.

注 2.1. 从集合论的角度, n元有序组$(x_1,\dots,x_n)$可以定义为映射$\{1,\dots,n\}\to F$, $i\mapsto x_i$.

考虑集合
$$F^n:=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_i\in F\},$$
并在它上面定义

- 向量加法: 对$\alpha=(x_1,\dots,x_n),\beta=(y_1,\dots,y_n)\in F^n$, 定义
$$\alpha+\beta=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n).$$
- 纯量乘法: 对$c\in F$, $\alpha=(x_1,\dots,x_n)\in F^n$, 定义
$$c\alpha=(cx_1,\dots,cx_n).$$

例 2.1. 集合$\mathbb{R}^2$或$\mathbb{R}^3$中的向量可以理解为平面或空间中的点, 也可以理解为从原点出发指向该点的"箭头". $\alpha+\beta$按照平行四边形法则. $c\alpha$与α方向相同或相反, 长度为α的长度的$|c|$倍. □

我们把F^n上的向量加法和纯量乘法的性质提炼出来, 引入下面的定义.

定义 2.1. 取定域F. 设集合V上给定了两个运算:

- 向量加法$V\times V\to V$, $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha+\beta$;
- 纯量乘法$F\times V\to V$, $(c,\alpha)\mapsto c\alpha$,

并且满足下面的性质(称为**公理**):

(1) 对任意$\alpha,\beta\in V$有$\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
(2) 对任意$\alpha,\beta,\gamma\in V$有$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.
(3) 存在$0_V\in V$满足对任意$\alpha\in V$有$\alpha+0_V=\alpha$.
(4) 对任意$\alpha\in V$, 存在$\beta\in V$满足$\alpha+\beta=0_V$.
(5) 对任意$\alpha\in V$有$1_F\alpha=\alpha$.
(6) 对任意$c_1,c_2\in F$和$\alpha\in V$有$(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$.
(7) 对任意$c\in F$和$\alpha,\beta\in V$有$c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$.
(8) 对任意$c_1,c_2\in F$和$\alpha\in V$有$(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$.

则称V为**域F上的线性空间**或**向量空间**, 简称为**F-线性空间**或**F-向量空间**. V中的元素称为**向量**. 性质(3)中的0_V称为**零向量**或**原点**(当无歧义时简记为0). 性质(4)中的β称为α的**负向量**, 记为$-\alpha$.

例 2.2. F^n是F-线性空间. 其中
$$0_{F^n}=(0_F,\dots,0_F),$$
并且对$\alpha=(x_1,\dots,x_n)$有
$$-\alpha=(-x_1,\dots,-x_n).$$
□

线性空间中的元素不一定是真的"向量". 例如下面的例子.

例 2.3. $\mathbb{C}$是$\mathbb{R}$上的线性空间. $\mathbb{C}^n$也是$\mathbb{R}$上的线性空间. 注意$\mathbb{C}^n$作为实线性空间和复线性空间是

不同的线性空间. 一般地, 若V是复线性空间, 则通过执行"忘掉复结构"的操作(即在做纯量乘法$(c,\alpha)\mapsto c\alpha$时只允许$c\in\mathbb{R}$), 可以把$V$视为实线性空间. 更一般地, 若$F'$是$F$的子域, 则$F$是$F'$-线性空间, F^n也是F'-线性空间, 任意F-线性空间被"忘掉F-结构"后为F'-线性空间. □

例 2.4. 给定集合S. 考虑映射(函数)的集合

$$F^S := \{f : S \to F\}.$$

定义

$$(f+g)(s) = f(s)+g(s), \qquad \forall f,g\in F^S, s\in S,$$
$$(cf)(s) = cf(s), \qquad \forall s\in S, c\in F, f\in F^S.$$

下面验证这样定义的"向量"加法和纯量乘法满足公理(1)–(8), 从而使F^S成为F-线性空间.

(1).

$$(f+g)(s) = f(s)+g(s) = g(s)+f(s) = (g+f)(s), \forall s\in S \quad\Longrightarrow\quad f+g=g+f.$$

(2).

$$((f+g)+h)(s) = (f+g)(s)+h(s) = (f(s)+g(s))+h(s),$$
$$(f+(g+h))(s) = f(s)+(g+h)(s) = f(s)+(g(s)+h(s)).$$

两式右边相等. 所以$(f+g)+h = f+(g+h)$.

(3). 取0_{F^S}为在S上恒等于0_F的函数.

(4). 对$f\in F^S$, 令$(-f)(s) = -f(s)$.

(5)–(8)显然.

注意到当$S = \{1,\dots,n\}$时, $f : \{1,\dots,n\} \to F$可以等同于$(f(1),\dots,f(n)) \in F^n$. 反过来, $(x_1,\dots,x_n)\in F^n$可等同于由$f(i)=x_i$定义的$f:\{1,\dots,n\}\to F$. 这样$F^{\{1,\dots,n\}}\cong F^n$. □

引理 2.1. 在线性空间中, 零向量是唯一的, 任意向量的负向量也是唯一的.

证明. 与引理1.1和1.2的证明类似. 设$0_V, 0'_V\in V$满足对任意$\alpha\in V$有$0_V+\alpha=\alpha$, $0'_V+\alpha=\alpha$. 在第一个式子中取$\alpha = 0'_V$, 得$0_V+0'_V = 0'_V$. 在第二个式子中取$\alpha = 0_V$, 得$0'_V+0_V = 0_V$. 但$0_V+0'_V = 0'_V+0_V$. 所以$0'_V = 0_V$. 为证明负向量的唯一性, 设$\alpha\in V$, 并设$\beta,\beta'\in V$满足$\alpha+\beta = \alpha+\beta' = 0_V$. 则

$$\beta' = 0_V+\beta' = (\beta+\alpha)+\beta' = \beta+(\alpha+\beta') = \beta+0_V = \beta.$$

□

注 2.2.
- 注意这里与教材的区别: 我们在线性空间的定义中不要求零向量和负向量的唯一性, 而是由定义推出它们的唯一性. 这样做的优点是简化了例子的验证.
- 类似的证明出现了三次(其他两次见引理1.1和1.2的证明), 原因是我们没有对研究对象进行充分的"公理化". 事实上, 引理1.1、1.2和2.1中的唯一性都可以归结为群中单位元和逆元的唯一性. 也许在以后的讲义中会先介绍群的概念.

由公理(1)和(2), 对任意有限个$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$, 表达式$\sum_{i=1}^n\alpha_i$有意义(与相加次序无关). 容易验证:

$$\sum c_i\alpha_i + \sum d_i\alpha_i = \sum (c_i+d_i)\alpha_i,$$
$$c\sum c_i\alpha_i = \sum (cc_i)\alpha_i.$$

命题 2.2. 设V是域F上的线性空间. 则

(1) (加法消去率) 设$\alpha, \beta, \gamma \in V$. 如果$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, 则$\alpha = \beta$.

(2) $c0_V = 0_V, \forall c \in F$.

(3) $0_F\alpha = 0_V, \forall \alpha \in V$.

(4) $c\alpha = 0_V \Longrightarrow c = 0_F$或$\alpha = 0_V$.

(5) $(-1_F)\alpha = -\alpha, \forall \alpha \in V$.

证明. (1) 两边同时加上$-\gamma$, 得

$$(\alpha + \gamma) + (-\gamma) = (\beta + \gamma) + (-\gamma).$$

而

$$(\alpha + \gamma) + (-\gamma) = \alpha + (\gamma + (-\gamma)) = \alpha + 0 = \alpha.$$

类似地,

$$(\beta + \gamma) + (-\gamma) = \beta.$$

因此$\alpha = \beta$. (注意这里的证明与命题1.3(1)的证明类似, 两者都可以归结为群运算的消去律.)

(2). 注意到$0_V + 0_V = 0_V$. 因此$c(0_V + 0_V) = c0_V$. 这推出$c0_V + c0_V = c0_V + 0_V$. 由(1)得$c0_V = 0_V$.

(3). 注意到$0_F + 0_F = 0_F$. 因此$(0_F + 0_F)\alpha = 0_F\alpha$. 这推出$0_F\alpha + 0_F\alpha = 0_F\alpha + 0_V$. 由(1)得$0_F\alpha = 0_V$.

(4) 若$c \neq 0_F$, 则$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1_F\alpha = \alpha$. 另一方面, 由(2)有$c^{-1}(c\alpha) = c^{-1}0_V = 0_V$. 因此$\alpha = 0_V$.

(5) 由负向量的唯一性, 只需证明$\alpha + (-1_F)\alpha = 0_V$. 这可以利用(3)验证如下:

$$\alpha + (-1_F)\alpha = 1_F\alpha + (-1_F)\alpha = (1_F + (-1_F))\alpha = 0_F\alpha = 0_V.$$

□

习题 2.1. 设F是域.

1. (乘法消去率) 设F是域, V是F-线性空间. 证明:
   (1) 对于$c \in F \setminus \{0_F\}$, $\alpha, \beta \in V$, 如果$c\alpha = c\beta$, 则$\alpha = \beta$.
   (2) 对于$c_1, c_2 \in F$, $\alpha \in V \setminus \{0_V\}$, 如果$c_1\alpha = c_2\alpha$, 则$c_1 = c_2$.
2. 证明$\mathbb{C}^n$在向量加法

   $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

   和纯量乘法

   $$c(x_1, \ldots, x_n) = (\bar{c}x_1, \ldots, \bar{c}x_n)$$

   下构成线性空间. (这一线性空间称为$\mathbb{C}^n$的复共轭空间.)

§2.2 子空间

定义 2.2. 设V是域F上的线性空间, W是V的子集. 如果

(1) $0 \in W$;

(2) 对任意$\alpha, \beta \in W$总有$\alpha + \beta \in W$;

(3) 对任意$\alpha \in W$和$c \in F$总有$c\alpha \in W$.

则称W是V的**(线性)子空间**.

容易看出, 如果W是V的子空间, 则V上的向量加法和纯量乘法可以限制在W上, 从而使W成为F-线性空间.

例 2.5.

- $W = V$或$\{0\}$称为V的**平凡子空间**. 注意空集不是V的子空间.
- $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W =$过原点的直线.
- $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W =$过原点的直线或平面.
- $V = F^n$.
$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 = 0\}$$
和
$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 = 2x_2\}$$
是子空间. 而
$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 = 1 + x_2\}$$
不是子空间.
- $V = F^F = \{任意函数 f : F \to F\}$, $W = \{多项式函数 f : F \to F\}$. 这里多项式函数指形如$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n (c_i \in F)$的函数.

定义 2.3. $\beta \in V$称为$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$的**线性组合**, 如果存在$c_1, \ldots, c_n \in F$满足$\beta = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$.

命题 2.3. 对于V的子集W, TFAE:

(1) W是子空间.

(2) W非空, 并且W中任意有限个向量的线性组合仍在W中.

(3) $0 \in W$, 并且对任意$\alpha, \beta \in W$和$c \in F$总有$c\alpha + \beta \in W$.

证明. "(1)$\Longrightarrow$(2)". 显然W非空. 若$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in W$, $c_1, \ldots, c_n \in F$, 则$c_i \alpha_i \in W$, 从而$\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \in W$.

"(2)$\Longrightarrow$(3)". 由于W非空, 所以可以取$\alpha \in W$. 而$0 = 0\alpha$是α的线性组合. 所以$0 \in W$. 另一结论显然.

"(3)$\Longrightarrow$(1)". 设$\alpha, \beta \in W$. 则$\alpha + \beta = 1\alpha + \beta \in W$. 另一方面, 设$\alpha \in W$, $c \in F$, 则$c\alpha = c\alpha + 0 \in W$. □

在验证V的子集是子空间时, 利用命题2.1(3)会比利用定义更为方便.

下面讨论子空间的交与和. 对于子集$S_1, \ldots, S_k \subset V$, 记
$$\sum_{i=1}^k S_i := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mid \alpha_i \in S_i \right\}.$$

命题 2.4. (1) 设$\{W_a \mid a \in A\}$是V的一族子空间. 则$\bigcap_{a \in A} W_a$也是V的子空间.

(2) 设$W_1,\dots,W_k$是V的子空间. 则$\sum_{i=1}^k W_i$也是V的子空间.

证明. (1). 首先, 对任意$a\in A$有$0\in W_a$, 所以$0\in\bigcap_{a\in A}W_a$. 另一方面, 设$\alpha,\beta\in\bigcap_{a\in A}W_a, c\in F$. 则对任意$a\in A$有$\alpha,\beta\in W_a$, 从而$c\alpha+\beta\in W_a$. 因此$c\alpha+\beta\in\bigcap_{a\in A}W_a$.

(2). 显然$0\in\sum_{i=1}^k W_i$. 设$\alpha,\beta\in\sum_{i=1}^k W_i, c\in F$. 则$\alpha=\sum_{i=1}^k\alpha_i$, $\beta=\sum_{i=1}^k\beta_i$, 其中$\alpha_i,\beta_i\in W_i$. 注意到$c\alpha_i+\beta_i\in W_i$. 于是

$$c\alpha+\beta=\sum_{i=1}^k(c\alpha_i+\beta_i)\in\sum_{i=1}^k W_i.$$

□

例 2.6. 设$V=F^4$,

$$W_1=\{(x,y,z,0)\mid x,y,z\in F\},$$
$$W_2=\{(x,0,0,y)\mid x,y\in F\}.$$

则

$$W_1+W_2=V,\qquad W_1\cap W_2=\{(x,0,0,0)\mid x\in F\}.$$

□

命题 2.5. 设$S\subset V$非空. 记

$$\mathrm{span}(S):=\{S\text{中任意有限个向量的线性组合}\}.$$

则$\mathrm{span}(S)$是子空间.

证明. 显然$0\in\mathrm{span}(S)$. 设$\alpha,\beta\in\mathrm{span}(S), c\in F$. 则$\alpha=\sum_{i=1}^m c_i\alpha_i$, $\beta=\sum_{j=1}^n d_j\beta_j$, 其中$\alpha_i,\beta_j\in S$. 从而

$$c\alpha+\beta=\sum_{i=1}^m(cc_i)\alpha_i+\sum_{j=1}^n d_j\beta_j\in\mathrm{span}(S).$$

□

定义 2.4. $\mathrm{span}(S)$称为**由S生成的子空间**. 如果$S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$有限, 也称$\mathrm{span}(S)$为由$\alpha_1,\dots,\alpha_n$生成的子空间, 记为$\mathrm{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. 我们约定$\mathrm{span}(\varnothing)=\{0\}$.

命题 2.6. 设$S\subset V$. 则

(1) 如果W是V的子空间并且包含S, 则W包含$\mathrm{span}(S)$. 从而$\mathrm{span}(S)$是包含S的最小子空间.

(2)

$$\mathrm{span}(S)=\bigcap_{\substack{W\text{是}V\text{的包含}\\S\text{的子空间}}}W.$$

证明. (1) 若$S=\varnothing$则显然. 设$S\neq\varnothing$. 则对任意$\alpha\in\mathrm{span}(S)$有$\alpha=\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i$, 其中$\alpha_i\in S\subset W$. 因此$\alpha\in W$. 这说明$\mathrm{span}(S)\subset W$.

(2) 记命题中的交集为W'. 它是V的子空间并且包含S. 由(1)即得$\mathrm{span}(S)\subset W'$. 另一方面, 由$W'$的定义, 它包含在每个包含$S$的子空间之中. 而$\mathrm{span}(S)$是包含$S$的子空间. 因此$W'\subset\mathrm{span}(S)$. 这就说明了$\mathrm{span}(S)=W'$. □

命题 2.7. 设$W_1,\dots,W_k$是V的子空间. 则$\sum_{i=1}^k W_i=\mathrm{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)$.

证明. 注意到$\bigcup_{i=1}^k W_i\subset\sum_{i=1}^k W_i$. 由命题2.6(1)即得$\mathrm{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)\subset\sum_{i=1}^k W_i$. 另一方面, 对任意$\alpha\in\sum_{i=1}^k W_i$有$\alpha=\sum_{i=1}^k\alpha_i$, 其中$\alpha_i\in W_i\subset\bigcup_{i=1}^k W_i$. 所以$\alpha\in\mathrm{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)$. 这说

明$\sum_{i=1}^k W_i \subset \operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)$. 因此有$\sum_{i=1}^k W_i = \operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)$. □

例 2.7. 设$F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^5$, $\alpha_1=(1,2,0,3,0)$, $\alpha_2=(0,0,1,4,0)$, $\alpha_3=(0,0,0,0,1)$. 则

$$\begin{aligned}\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} &= \{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3 \mid c_i\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(c_1,2c_1,c_2,3c_1+4c_2,c_3)\mid c_i\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x_1,\ldots,x_5)\mid x_2=2x_1, x_4=3x_1+4x_3\}.\end{aligned}$$

□

例 2.8. 设$V=\{f:F\to F$是多项式函数$\}$. 定义$f_n\in V$为$f_n(x)=x^n$, $n=0,1,\ldots$. 则

$$\operatorname{span}\{f_0,f_1,\ldots\}=V.$$

□

习题 2.2. 1. 设V为F-线性空间, $W_1,W_2\subset V$为真子空间. 证明$W_1\cup W_2\neq V$.

2. 设V为F-线性空间, $M,N\subset V$为子空间, $N\subset M$. 证明对任意子空间$W\subset V$有

$$M\cap(N+W)=N+(M\cap W).$$

§2.3 基和维数

给定域F和F-线性空间V.

定义 2.5. (1) 设$S=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$为$V$的有限非空子集. 如果存在不全为零的$c_1,\ldots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i=0$, 则称$S$**线性相关**. 否则, 称$S$**线性无关**. 相应地, 我们也称向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性相关或线性无关.

(2) 设S为V的任意非空子集. 如果S具有有限非空线性相关子集, 则称S**线性相关**. 否则, 称S**线性无关**.

(3) 约定空集是线性无关的.

注 2.3.
- 容易看出, 如果(2)中的子集S有限, 则定义与(1)一致.
- $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$线性无关$\Longleftrightarrow$如果$c_1,\ldots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i=0$, 则$c_1=\cdots=c_n=0$.
- $S\subset V$线性无关$\Longleftrightarrow$ S的任意有限子集线性无关.
- 若$S\subset T\subset V$, 则S线性相关$\Longrightarrow$ T线性相关, T线性无关$\Longrightarrow$ S线性无关.
- 若$0_V\in S$则S线性相关: $1_F 0_V=0_V$.

例 2.9. 设$F=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{C}^3$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_4$见P41. 则它们线性相关: $2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4=0$. □

定义 2.6. 设$S\subset V$. 如果S线性无关并且生成V, 则称S是V的**基**. 如果V存在有限基, 则称V是**有限维**的; 否则, 称V是**无穷维**的.

例 2.10. 空集是零线性空间$\{0\}$的基. □

例 2.11. 设$V=F^n$. 取$\epsilon_1=(1,0,\ldots,0),\ldots,\epsilon_n=(0,\ldots,0,1)$. 则$\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}$是$F^n$的基, 称为$F^n$的**标准基**. 验证如下:

线性无关: 设$c_1,\ldots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i\epsilon_i=0$, 则$(c_1,\ldots,c_n)=0$, 即$c_1=\cdots=c_n=0$.

$\operatorname{span}\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}=V$: 对任意$\alpha=(x_1,\ldots,x_n)\in F^n$, 有$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\epsilon_i\in\operatorname{span}\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}$.

这说明F^n是有限维的. □

例 2.12. 设F是$\mathbb{C}$的子域, $V=\{$多项式函数$f:F\to F\}$. 定义$f_k\in V$为$f_k(x)=x^k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. 则$S:=\{f_k\mid k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$是$V$的基:
$\operatorname{span}(S)=V$: 见上一节.
S线性无关: 对任意互不相同的$f_{k_1},\dots,f_{k_n}$, 如果$c_1,\dots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i f_{k_i}=0$, 则

$$\sum_{i=1}^n c_i x^{k_i}=\sum_{i=1}^n c_i f_{k_i}(x)=\left(\sum_{i=1}^n c_i f_{k_i}\right)(x)=0,\qquad \forall x\in F.$$

由于$F\subset\mathbb{C}$, 所以含有无穷多个元素. 而非零复多项式只有有限多个根, 所以$c_i=0$. □

上一例子中的空间V是无穷维的: 对任意有限集$T=\{g_1,\dots,g_r\}\subset V$, 存在正整数$N$满足$\deg g_i<N$, 于是$f_N\notin\operatorname{span}(T)$, 从而$\operatorname{span}(T)\neq V$. 我们下面证明类似的现象在一般情况总成立, 即有限维线性空间的任意基有限.

定理 2.8. 设S,T为线性空间V的有限子集. 假设S线性无关, T生成V. 则$|S|\le|T|$.

证明. 设$S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $T=\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$. 考虑$V$的子空间

$$M_i=\operatorname{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_i\},\qquad i=1,\dots,m,$$
$$N_k=\operatorname{span}\{\beta_1,\dots,\beta_k\},\qquad k=1,\dots,n,$$

并约定$M_0=N_0=\{0\}$. 则定理的条件推出$N_n=V$, 并且对每个$i\in\{1,\dots,m\}$有$M_i\smallsetminus M_{i-1}\neq\varnothing$. 记$k_i\in\{1,\dots,n\}$为使得$(M_i\smallsetminus M_{i-1})\cap N_{k_i}\neq\varnothing$的最小指标. 我们证明$k_1,\dots,k_m$互不相同. 假设存在$i,j\in\{1,\dots,m\}$, $i<j$, 满足$k_i=k_j=k$. 取

$$\gamma_i\in(M_i\smallsetminus M_{i-1})\cap N_k,\qquad \gamma_j\in(M_j\smallsetminus M_{j-1})\cap N_k.$$

我们断言存在$c\in F$使得$c\gamma_i+\gamma_j\in N_{k-1}$. 事实上, 设

$$\gamma_i=\sum_{r=1}^k a_r\beta_r,\qquad \gamma_j=\sum_{r=1}^k b_r\beta_r.$$

由于$(M_i\smallsetminus M_{i-1})\cap N_{k-1}=\varnothing$, 所以$a_k\neq 0$. 取$c=-a_k^{-1}b_k$即满足要求. 另一方面, 由于$i<j$, 我们有$M_i\subset M_{j-1}$. 这推出$c\gamma_i+\gamma_j\in M_j\smallsetminus M_{j-1}$. 结合起来有$c\gamma_i+\gamma_j\in(M_j\smallsetminus M_{j-1})\cap N_{k-1}$, 与$(M_j\smallsetminus M_{j-1})\cap N_{k-1}=\varnothing$矛盾. 这就证明了$k_1,\dots,k_m\in\{1,\dots,n\}$互不相同. 因此$m\le n$. □

在习题中将利用归纳法给出定理2.8的另一个更为直观的证明.

推论 2.9. 设V是有限维线性空间, 则V的任意基有限, 并且任意两组基含有相同的向量个数.

证明. 由于V存在有限基, 由定理2.8, V的任意基有限. 进一步, 定理2.8推出对V的任意两组基S_1,S_2有$|S_1|\le|S_2|$并且$|S_2|\le|S_1|$. 因此$|S_1|=|S_2|$. □

定义 2.7. 设V是有限维线性空间, V的基含有的共同向量个数称为V的**维数**, 记为$\dim V$.

上面的例子已经说明, $\dim F^n=n$, $\dim\{0\}=0$.

推论 2.10. 设V是有限维线性空间, $S\subset V$.

(1) 如果S线性无关, 则$|S|\le\dim V$. 因此$\dim V$是V的线性无关子集中向量个数的最大值.

(2) 如果S生成V, 则$|S|\ge\dim V$. 因此$\dim V$是V的生成全空间的子集中向量个数的最小值.

证明. 由定理2.8显然. □

定理 2.11. 设V是有限维线性空间, $W\subset V$是子空间, $S_1\subset S_2\subset W$. 假设S_1线性无关, S_2生成W. 则存在W的基S_0满足$S_1\subset S_0\subset S_2$.

证明. 考虑V的子集族

$$\mathcal{F}=\{S\subset V\mid S_1\subset S\subset S_2,\ S\text{线性无关}\}.$$

注意到$S_1\in\mathcal{F}$. 所以$\mathcal{F}$非空. 由推论2.10(1), $\mathcal{F}$中的集合至多含有$\dim V$个向量. 于是, $\mathcal{F}$中的集合含有的向量个数存在最大值, 设为n. 取$S_0=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\in\mathcal{F}$. 我们证明$S_2\subset\operatorname{span}(S_0)$. 若不然, 则可以取$\beta\in S_2\setminus\operatorname{span}(S_0)$. 我们验证$S_0\cup\{\beta\}$线性无关. 假设$\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i+b\beta=0$. 如果$b\neq 0$, 则

$$\beta=\sum_{i=1}^n(-b^{-1}a_i)\alpha_i\in\operatorname{span}(S_0),$$

矛盾. 因此$b=0$. 这推出$\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i=0$. 由于$S_0$线性无关, 这推出$a_i=0$. 这说明$S_0\cup\{\beta\}$线性无关. 注意到$S_1\subset S_0\cup\{\beta\}\subset S_2$. 所以$S_0\cup\{\beta\}\in\mathcal{F}$. 但是$|S_0\cup\{\beta\}|=n+1$, 与$n$的最大性矛盾. 这就证明了$S_2\subset\operatorname{span}(S_0)$. 从而$\operatorname{span}(S_2)\subset\operatorname{span}(S_0)$. 另一方面, 显然有$\operatorname{span}(S_0)\subset\operatorname{span}(S_2)$. 所以$\operatorname{span}(S_0)=\operatorname{span}(S_2)=W$. 因此$S_0$是$W$的基. □

推论 2.12. 设V是有限维线性空间, $S\subset V$.

(1) 若S线性无关, 则S可以扩充为V的基.

(2) 若S生成V, 则S的某个子集为V的基.

证明. (1) 在定理2.11中取$W=V$, $S_1=S$, $S_2=V$.

(2) 在定理2.11中取$W=V$, $S_1=\varnothing$, $S_2=S$. □

推论 2.13. 设V是有限维线性空间, $S\subset V$满足$|S|=\dim V$. 假设S线性无关或者S生成V. 则S是V的基.

证明. 如果S线性无关, 则S可以扩充为V的基S_1. 但是$|S|=\dim V=|S_1|$. 因此$S=S_1$是基. 类似地, 如果S生成V, 则存在V的基$S_2\subset S$. 但是$|S|=\dim V=|S_2|$. 因此$S=S_2$是基. □

接下来考虑子空间的维数性质.

推论 2.14. 设V是有限维线性空间, $W\subset V$是子空间. 则

(1) W是有限维线性空间, 并且$\dim W\leq\dim V$;

(2) 若W是真子空间, 则$\dim W<\dim V$.

证明. (1) 在定理2.11中取$S_1=\varnothing$, $S_2=W$, 可知W存在基S. 由于S线性无关, 由推论2.10(1), 有$|S|\leq\dim V$. 因此W是有限维的, 并且$\dim W\leq\dim V$.

(2) 取W的基S. 如果$\dim W=\dim V$, 则$|S|=\dim V$. 由于S线性无关, 由推论2.13, S是V的基, 从而$W=\operatorname{span}(S)=V$, 矛盾. □

定理 2.15. 设W_1,W_2是线性空间V的有限维子空间, 则W_1+W_2是有限维的, 并且

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2).$$

证明. 因为W_1,W_2有限维, 所以$W_1\cap W_2$有限维. 取$W_1\cap W_2$的基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_d\}$, 并分别扩充为$W_1$的基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_d,\beta_1,\ldots,\beta_m\}$和$W_2$的基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_d,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$. 我们断言:

$$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_d,\beta_1,\ldots,\beta_m,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$$

是W_1+W_2的基. 验证如下:

线性无关: 设$\sum x_i\alpha_i+\sum y_j\beta_j+\sum z_k\gamma_k=0$. 注意到$\sum x_i\alpha_i+\sum y_j\beta_j\in W_1$, 所以$\sum z_k\gamma_k\in W_1$. 另一方面, 还有$\sum z_k\gamma_k\in W_2$. 所以$\sum z_k\gamma_k\in W_1\cap W_2$. 于是存在$c_i$使$\sum z_k\gamma_k=\sum c_i\alpha_i$. 但是$\{\alpha_i,\gamma_k\}$线性无关. 所以$z_k=c_i=0$. 这进一步推出$\sum x_i\alpha_i+\sum y_j\beta_j=0$. 由于$\{\alpha_i,\beta_j\}$线性无

关, 所以$x_i=y_j=0$. 因此$x_i=y_j=z_k=0$.

$\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}=W_1+W_2$: "$\subset$": $\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}$中的任意向量$\alpha$形如

$$\alpha=\sum x_i\alpha_i+\sum y_j\beta_j+\sum z_k\gamma_k.$$

由于$\sum x_i\alpha_i+\sum y_j\beta_j\in W_1$, $\sum z_k\gamma_k\in W_2$, 所以$\alpha\in W_1+W_2$.

"$\supset$": W_1+W_2中的任意向量α形如$\alpha=\beta+\gamma$, 其中$\beta\in W_1$, $\gamma\in W_2$. 而

$$W_1=\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j\}\subset\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\},\qquad W_2=\mathrm{span}\{\alpha_i,\gamma_k\}\subset\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}.$$

所以$\beta,\gamma\in\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}$. 因此$\alpha=\beta+\gamma\in\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}$.

由断言即得W_1+W_2是有限维的, 并且

$$\dim(W_1+W_2)=d+m+n=(d+m)+(d+n)-d=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2).$$

□

习题 2.3. 1. 设V为F-线性空间, $S\subset V$线性无关, $\alpha\in V\smallsetminus S$. 证明$S\cup\{\alpha\}$线性无关的充分必要条件是$\alpha\notin\mathrm{span}(S)$.

2. 设V为F-线性空间, S_1,S_2,S_3是V的子集, $W_i=\mathrm{span}(S_i)$ $(i=1,2,3)$. 假设$S_1\cup S_2\cup S_3$线性无关. 证明

$$W_1\cap(W_2+W_3)=(W_1\cap W_2)+(W_1\cap W_3).$$

3. (Steinitz替换引理) 在定理2.8的条件下, 用归纳法证明: 对任意$0\le k\le\min\{|S|,|T|\}$, 存在$S_k\subset S$和$T_k\subset T$使得$|S_k|=|T_k|=k$并且$(T\smallsetminus T_k)\cup S_k$生成$V$.

4. 利用Steinitz替换引理给出定理2.8的另一个证明.

5. 设m,n为正整数, $a_{ij},b_i\in F$ $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$. 考虑关于未知量$x_1,\dots,x_n\in F$的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

(1) 假设$m<n$, 并且$b_1=\cdots=b_m=0$. 证明方程组有非零解(即$x_1,\dots,x_n$不全为零的解).

(2) 假设$m>n$. 证明存在$b_1,\dots,b_m\in F$使得方程组无解.

(提示: 分析F^m中的向量集$\{(a_{1j},\dots,a_{mj})\mid 1\le j\le n\}$是否线性无关, 是否生成全空间.)

6. 设V为有限维F-线性空间, $\dim V=n\ge 2$. 设V的$2n-2$个子空间$M_1,\dots,M_{n-1},N_1,\dots,N_{n-1}$满足

$$\dim M_i=\dim N_i=i,\qquad i=1,\dots,n-1,$$

并且

$$M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_{n-1},\qquad N_1\subset N_2\subset\cdots\subset N_{n-1}.$$

证明存在V的基S, 使得这$2n-2$个子空间中的每一个均由S的某个子集生成.

7. 设V为有限维F-线性空间, W_1,W_2,W_3是V的子空间. 证明

$$\begin{aligned}\dim(W_1+W_2+W_3)\le&\dim W_1+\dim W_2+\dim W_3\\&-\dim(W_1\cap W_2)-\dim(W_2\cap W_3)-\dim(W_3\cap W_1)\\&+\dim(W_1\cap W_2\cap W_3).\end{aligned}$$