基的存在性[1]

定理 1. 任意线性空间存在基.

我们先用最朴素的想法尝试证明. 为简化叙述, 采用反证法. 假设某个F-线性空间V不存在基, 即V的任意线性无关子集S不生成V. 则可以取向量

$$\alpha_1 \in V \setminus \{0\}, \qquad \alpha_2 \in V \setminus \operatorname{span}\{\alpha_1\}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{k+1} \in V \setminus \operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \ldots$$

在这一过程中, 向量集$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$总是线性无关的. 无穷向量集$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$也是线性无关的. 于是我们可以继续取向量

$$\beta_1 \in V \setminus \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}, \qquad \beta_2 \in V \setminus \operatorname{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1\}), \ldots$$

向量集$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$和$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$都是线性无关的. 于是我们可以在

$$V \setminus \operatorname{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1, \beta_2, \ldots\})$$

中继续取向量. 但是, 这样持续下去, 即使取出了无穷多行向量, 我们也难以得到矛盾. 这是因为上面的思路限定了我们只能取出可数多个向量, 而确实存在无可数基的线性空间（例如$\mathbb{R}$作为$\mathbb{Q}$-线性空间）. 为了完成证明, 我们同时考虑所有形如

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \qquad \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$$

的向量集, 并且希望在每个这样的向量集当中体现出向量选取次序的信息. 为此, 我们把上述向量集替换为集合族

$$\begin{gathered}\{\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \ldots, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}\}, \\ \{\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \ldots\} \cup \{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1\}, \ldots, \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}\}.\end{gathered} \tag{1}$$

这种集合族$\mathscr{F}$的一个特点是: 对任意$S \in \mathscr{F}$, 如果我们考虑$\mathscr{F}$中所有真包含于S的集合的并集U, 并将取出U中所有向量后再次取出的第一个向量记为α, 则$S = U \cup \{\alpha\}$. 通过同时考虑所有形如(1)的集合族, 我们得以给出下面的证明.

定理1的证明. 用反证法. 假设某个F-线性空间V不存在基, 即任意线性无关子集$S \subset V$不生成V. 对每个线性无关子集$S \subset V$, 取定向量$\alpha(S) \in V \setminus \operatorname{span}(S)$. 对于$V$的子集族$\mathscr{F}$及$S \in \mathscr{F}$, 记

$$\cup\mathscr{F} = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A, \qquad \mathscr{F}_S = \{T \in \mathscr{F} : T \subsetneq S\}.$$

下面明确“形如(1)的集合族”的确切含义. 我们称V的子集族$\mathscr{F}$为**可容许的**, 如果:

(i) $\mathscr{F}$中集合均线性无关;

(ii) 对任意$S, T \in \mathscr{F}$, 总有$S \subset T$或$T \subset S$;

(iii) $\mathscr{F}$的任意非空子族$\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$中总有最小集合, 即存在$S \in \mathscr{F}'$, 使得对任意$T \in \mathscr{F}'$, 总有$S \subset T$;

(iv) 对任意$S \in \mathscr{F}$, 总有$S = (\cup\mathscr{F}_S) \cup \{\alpha(\cup\mathscr{F}_S)\}$.

注意(i)和(ii)推出$\cup\mathscr{F}$线性无关, 从而(iv)中的$\alpha(\cup\mathscr{F}_S)$有意义. 容易看出, 空族可容许; 并且如果$\mathscr{F}$可容许, 则$\mathscr{F} \cup \big\{(\cup\mathscr{F}) \cup \{\alpha(\cup\mathscr{F})\}\big\}$可容许. 特别地, 若记

$$\alpha_1 = \alpha(\varnothing), \qquad \alpha_2 = \alpha(\{\alpha_1\}), \qquad \alpha_3 = \alpha(\{\alpha_1, \alpha_2\}), \ldots$$

$$\beta_1 = \alpha(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}), \qquad \beta_2 = \alpha(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1\}), \qquad \beta_3 = \alpha(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\beta_1, \beta_2\}), \ldots$$

则(1)中的集合族可容许.

---

[1]高代实验班阅读材料, 撰写者: 安金鹏, 2021年10月

我们证明: 对任意两个不同的可容许子集族$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$, 要么存在$S \in \mathscr{F}$使$\mathscr{G} = \mathscr{F}_S$, 要么存在$T \in \mathscr{G}$使$\mathscr{F} = \mathscr{G}_T$. 考虑

$$\mathscr{H} = \{A \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G} : \mathscr{F}_A = \mathscr{G}_A\}.$$

我们先验证: 要么$\mathscr{H} = \mathscr{F}$, 要么存在$S \in \mathscr{F}$使$\mathscr{H} = \mathscr{F}_S$. 假设$\mathscr{H} \neq \mathscr{F}$. 取$\mathscr{F} \smallsetminus \mathscr{H}$中的最小集合$S$. 则$\mathscr{F}_S \subset \mathscr{H}$. 另一方面, 如果存在$A \in \mathscr{H} \smallsetminus \mathscr{F}_S$, 则$S \in \mathscr{F}_A = \mathscr{G}_A$, 特别地有$S \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$, 又由$S \subset A$得$S \in \mathscr{H}$, 矛盾. 这就证明了$\mathscr{H} = \mathscr{F}_S$. 类似地, 要么$\mathscr{H} = \mathscr{G}$, 要么存在$T \in \mathscr{G}$使$\mathscr{H} = \mathscr{G}_T$. 假设$\mathscr{H} \neq \mathscr{F}$并且$\mathscr{H} \neq \mathscr{G}$. 则存在$S \in \mathscr{F}$与$T \in \mathscr{G}$使$\mathscr{H} = \mathscr{F}_S = \mathscr{G}_T$. 于是

$$S = (\cup \mathscr{F}_S) \cup \{\alpha(\cup \mathscr{F}_S)\} = (\cup \mathscr{G}_T) \cup \{\alpha(\cup \mathscr{G}_T)\} = T.$$

这说明$S \in \mathscr{H}$, 与$\mathscr{H} = \mathscr{F}_S$矛盾. 因此只能有$\mathscr{H} = \mathscr{F}$或$\mathscr{G}$. 如果$\mathscr{H} = \mathscr{F}$, 则$\mathscr{H} \neq \mathscr{G}$, 从而存在$T \in \mathscr{G}$使$\mathscr{H} = \mathscr{G}_T$. 这说明$\mathscr{F} = \mathscr{G}_T$. 类似地, 如果$\mathscr{H} = \mathscr{G}$, 则存在$S \in \mathscr{F}$使$\mathscr{G} = \mathscr{F}_S$.

考虑所有可容许子集族的并, 记为$\mathscr{E}$. 我们验证$\mathscr{E}$可容许:

- $\mathscr{E}$中集合均线性无关: 显然.
- 对任意$S, T \in \mathscr{E}$总有$S \subset T$或$T \subset S$: 取可容许子集族$\mathscr{F}, \mathscr{G}$分别包含S, T. 由上一段, 有$\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$或$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$. 所以$S, T$包含在同一个可容许子集族之中, 于是有包含关系.
- $\mathscr{E}$的任意非空子族$\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$中总有最小集合: 取可容许子集族$\mathscr{F}$满足$\mathscr{F} \cap \mathscr{E}' \neq \varnothing$, 并取$\mathscr{F} \cap \mathscr{E}'$中的最小集合$S$. 我们验证$S$也是$\mathscr{E}'$中的最小集合. 设$T \in \mathscr{E}'$. 若$T \in \mathscr{F}$, 则显然$S \subset T$. 设$T \notin \mathscr{F}$. 取可容许子集族$\mathscr{G}$满足$T \in \mathscr{G}$, 则$\mathscr{G} \not\subset \mathscr{F}$, 于是存在$U \in \mathscr{G}$使$\mathscr{F} = \mathscr{G}_U$. 这推出$S \subset U \subset T$.
- 对任意$S \in \mathscr{E}$, 总有$S = (\cup \mathscr{E}_S) \cup \{\alpha(\cup \mathscr{E}_S)\}$: 取包含$S$的可容许子集族$\mathscr{F}$. 则$S = (\cup \mathscr{F}_S) \cup \{\alpha(\cup \mathscr{F}_S)\}$. 只需证$\mathscr{E}_S = \mathscr{F}_S$. 显然$\mathscr{F}_S \subset \mathscr{E}_S$. 为证明$\mathscr{E}_S \subset \mathscr{F}_S$, 只需证$\mathscr{E}_S \subset \mathscr{F}$. 设$T \in \mathscr{E}_S$, 并取包含$T$的可容许子集族$\mathscr{G}$. 若$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, 则显然$T \in \mathscr{F}$. 设$\mathscr{G} \not\subset \mathscr{F}$. 则存在$U \in \mathscr{G}$使$\mathscr{F} = \mathscr{G}_U$. 由$T \subset S$和$S \in \mathscr{F} = \mathscr{G}_U$即得$T \in \mathscr{G}_U = \mathscr{F}$.

这就验证了$\mathscr{E}$可容许. 由$\mathscr{E}$的定义, 它包含所有可容许子集族. 但子集族$\mathscr{E} \cup \big\{(\cup \mathscr{E}) \cup \{\alpha(\cup \mathscr{E})\}\big\}$也是可容许的, 并且不包含在$\mathscr{E}$中, 矛盾. $\square$

在上面的证明中, 我们对V的所有线性无关子集S, 一次性地取定了向量$\alpha(S) \in V \smallsetminus \mathrm{span}(S)$. 这相当于选取了映射

$$\alpha : V\text{的所有线性无关子集构成的子集族} \longrightarrow V,$$

使得对任意线性无关子集$S \subset V$, 总有$\alpha(S) \in V \smallsetminus \mathrm{span}(S)$. 在数学证明中是否允许做类似的操作, 历史上曾经引起一些争议, 但在现代数学中已经被普遍接受, 并被总结为下面的公理:

选择公理. 对任意非空集合X, 存在映射$f : \mathscr{P}(X) \smallsetminus \{\varnothing\} \to X$, 使得对$X$的任意非空子集$Y$, 总有$f(Y) \in Y$.

这里$\mathscr{P}(X)$为X的幂集, 即由X的所有子集构成的子集族. 满足选择公理的映射f称为*选择函数*.

上面定理1的证明依赖于选择公理. 我们必须承认, 该证明并不平凡. 很多重要数学定理的证明依赖于选择公理. 对于其中的一些定理, 如果直接利用选择公理来证明, 论证过程与上面定理1的证明有类似的部分. 人们把这些类似的论证“打包封装”到一起, 证明了一个一般性结果, 称为Zorn引理. 利用Zorn引理来证明这些定理（例如上面的定理1）, 叙述会大为简化.

为了叙述并证明Zorn引理, 我们先引入下面的概念.

定义 1. 设X为集合.

(1) X上的偏序指满足下列条件的X上的二元关系"$\le$":

 – 对任意$x \in X$, 总有$x \le x$;

 – 对$x, y \in X$, 如果$x \le y$并且$y \le x$, 则$x = y$;

 – 对$x, y, z \in X$, 如果$x \le y$并且$y \le z$, 则$x \le z$.

(2) X上的全序指满足下述条件的偏序"$\le$": 对任意$x, y \in X$, 总有$x \le y$或$y \le x$.

(3) X上的良序指满足下述条件的全序"$\le$": X的每个非空子集有最小元, 即对任意非空的$Y \subset X$, 存在$y_0 \in Y$, 使得对任意$y \in Y$, 总有$y_0 \le y$.

注. 这里的二元关系指$X \times X$的一个子集R. 当$(x, y) \in R$时, 我们记$x \le y$.

我们再引入几个概念和记号.

定义 2. 设X为偏序集.

(1) 对$x, y \in X$, 如果$x \le y$并且$x \ne y$, 则记$x < y$.

(2) 对于X的子集Y, 称$x \in X$为Y在X中的上界, 如果对任意$y \in Y$, 总有$y \le x$.

(3) 称$x \in X$为X的极大元, 如果不存在$x' \in X$使得$x < x'$.

Zorn引理. 设X为偏序集. 假设X的任意全序子集在X中有上界. 则X有极大元.

在下面的证明中, 我们仅用到"X的任意良序子集在X中有上界"这一较弱的条件.

证明. 用反证法. 假设X无极大元. 我们断言: X的任意良序子集A在$X \setminus A$中有上界. 为验证断言, 取A的上界$x \in X$. 如果$x \notin A$, 则断言成立. 如果$x \in A$, 由于x不是X的极大元, 所以存在$x' \in X$满足$x < x'$, 于是A中每个元素严格小于x', 这说明x'也是A的上界, 并且$x' \notin A$. 这就验证了断言.

由选择公理, 可取选择函数$f : \mathscr{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$. 由上述断言, 对任意良序子集$A \subset X$, 集合

$$U_A := \{x \in X \setminus A : x\text{为}A\text{的上界}\}$$

非空. 记$g(A) = f(U_A)$. 也就是说, 对X的所有良序子集A, 我们一次性地取定了A在$X \setminus A$中的上界$g(A)$. 对于$A \subset X$和$a \in A$, 记

$$A_{<a} = \{x \in A : x < a\}.$$

我们称X的子集A为可容许的, 如果A是良序的, 并且对任意$a \in A$总有$g(A_{<a}) = a$. 容易看出, 空集可容许; 并且如果A可容许, 则$A \cup \{g(A)\}$可容许.

我们先证明: 对任意两个不同的可容许集A和B, 要么存在$a \in A$使$B = A_{<a}$, 要么存在$b \in B$使$A = B_{<b}$. 记

$$C = \{c \in A \cap B : A_{<c} = B_{<c}\}.$$

我们验证: 要么$C = A$, 要么存在$a \in A$使$C = A_{<a}$. 假设$C \ne A$. 由于A是良序的, 余集$A \setminus C$中存在最小元$a \in A \setminus C$. 显然$A_{<a} \subset C$. 如果$C \setminus A_{<a}$非空, 取$c \in C \setminus A_{<a}$, 则$a \in A_{<c} = B_{<c}$, 特别地, $a \in A \cap B$并且$A_{<a} = B_{<a}$, 从而$a \in C$, 矛盾. 这就证明了$C = A_{<a}$. 类似地, 要么$C = B$, 要么存在$b \in B$使$C = B_{<b}$. 如果$C \ne A$并且$C \ne B$, 则存在$a \in A$和$b \in B$使得$C = A_{<a} = B_{<b}$, 这推出$a = g(A_{<a}) = g(B_{<b}) = b$, 从而$a = b \in C$, 矛盾. 因此只能有$C = A$或$C = B$. 如果$C = A$, 则$C \ne B$, 从而存在$b \in B$使$A = C = B_{<b}$. 类似地, 如果$C = B$, 则存在$a \in A$使$B = A_{<a}$.

记E为X的所有可容许子集的并集. 我们验证E可容许:

- E是全序的: 设$a, b \in E$. 取可容许集A, B分别包含a, b. 由于$A \subset B$或$B \subset A$, 所以a与b包含在同一个可容许集之中, 从而$a \le b$或$b \le a$.
- E是良序的: 设$E' \subset E$非空. 我们需要说明E'有最小元. 取可容许集A满足$A \cap E' \neq \varnothing$, 并取$A \cap E'$的最小元$a \in A \cap E'$. 我们验证$a$也是$E'$的最小元. 设$x \in E'$. 如果$x \in A$, 则显然$a \le x$. 如果$x \notin A$, 取可容许集$B$满足$x \in B$, 则$B \not\subset A$, 从而存在$b \in B$使得$A = B_{<b}$, 这推出$a < b \le x$. 因此$a$是$E'$的最小元.
- 对任意$a \in E$有$g(E_{<a}) = a$: 取包含a的可容许集A. 则$g(A_{<a}) = a$. 只需证明$E_{<a} = A_{<a}$. 显然有$A_{<a} \subset E_{<a}$. 为证明$E_{<a} \subset A_{<a}$, 只需证$E_{<a} \subset A$. 设$x \in E_{<a}$, 并取包含x的可容许集B. 如果$B \subset A$, 则显然$x \in A$. 如果$B \not\subset A$, 则存在$b \in B$使得$A = B_{<b}$, 由$x < a < b$即得$x \in B_{<b} = A$. 这就证明了$E_{<a} \subset A$.

这说明E为包含所有可容许集的可容许集. 但$E \cup \{g(E)\}$可容许, 并且不包含在E中, 矛盾. □

可以证明, 选择公理等价于Zorn引理, 也等价于定理1[2]. 还有很多与选择公理等价的命题, 其中之一为:

良序定理. 任意集合上存在良序.

习题 . 1. 设F-线性空间V的子集族$\mathscr{F}$满足定理1证明中的条件(i)和(ii). 证明$\cup\mathscr{F}$线性无关.

2. 利用Zorn引理证明定理1.

[2]选择公理与定理1的等价性于1984年才被证明. 见Andreas Blass, *Existence of bases implies the axiom of choice*, in "Axiomatic Set Theory (Boulder, Colo., 1983)", 31–33, Contemp. Math., 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.