齐性动力系统的有界轨道

安金鹏, 关力凡

摘要. 齐性动力系统是由李群给出的一类特殊动力系统, 与丢番图逼近等数论方向有着紧密的联系. 本文概述关于齐性动力系统有界轨道的主要问题和结果, 并介绍它们与Oppenheim猜想、Littlewood猜想、Schmidt猜想等丢番图逼近问题的关系.

1. 引言

齐性动力系统是一类特殊的动力系统, 所在的空间为李群的齐性空间, 动力系统由群运算诱导而成. 具体地, 设G是李群[1], Γ是G的闭子群, 并考虑齐性空间$X = G/\Gamma$. 齐性动力系统关注G的另一子群H在X上自然的平移作用, 研究这一群作用的轨道和不变测度的性质, 并考察当H中的群元素趋于无穷远时群作用的渐进行为. 这样产生的动力系统包含若干经典的实例, 如常负曲率曲面的测地流和极限圆流等.

在对齐性动力系统的研究中, 结合李群与动力系统的方法, 可以得到比一般动力系统更好的性质. 例如, Ratner定理表明, 对于幂幺的齐性动力系统, 轨道的闭包均为具有代数性质的子流形, 不变测度也可以从代数的角度来分类[63]. 对于其他一些重要的情况, 人们也猜想并部分证明了类似的结果成立[12, 24, 26, 40, 48]. 另一方面, 适当的子群Γ(例如$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$)可以包含丰富的算术信息, 相应的动力系统与数论有着紧密的联系. 例如, 在丢番图逼近方面, 以齐性动力系统为工具, Margulis证明了Oppenheim猜想[43, 44], Kleinbock和Margulis证明了Baker-Sprindžuk猜想[35], Einsiedler、Katok和Lindenstrauss对Littlewood猜想做出了重要的推进[25], Shah对Dirichlet定理的可改进性也证明了重要的结果[68]. 在代数数论和解析数论等领域, 齐性动力系统也得到了重要的应用, 见[27, 50, 51, 56, 70]等.

献给钱敏教授90华诞.

[1]本文中的李群指实李群. 齐性动力系统也关注其他拓扑群(如p-adic李群)的情形, 但我们在这里暂不涉及.

对于重要的情况, 子群H在空间X上的平移作用一般是遍历的. 这时, 空间X中具有非稠密H-轨道的点构成零测集. 但是, 正是这些非稠密轨道反映了动力系统的复杂性, 并且体现了与数论问题的联系. 在对非稠密轨道的研究中, 有界轨道、发散轨道、闭包或极限集与取定子集不相交的轨道等几种轨道类型都得到了广泛的关注.

本文简要综述齐性动力系统有界轨道方面的主要问题和结果及其与丢番图逼近的联系. 第2节介绍齐性动力系统的一般框架. 第3–5节按照子群H的不同类型, 分别讨论幂幺系统、多参数可对角化系统、单参数可对角化系统的有界轨道的性质, 并介绍它们与Oppenheim猜想、Littlewood猜想、Schmidt猜想等丢番图逼近问题的关系. 关于发散轨道等其他类型非稠密轨道的研究进展, 见[7, 17, 23, 32, 37, 39]等.

2. 齐性动力系统的框架

设G是连通李群, Γ是G的闭子群, 并在齐性空间$X = G/\Gamma$上赋予自然的光滑流形结构. 如果$g \in G$, 则G的循环子群$\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$在$X$上的平移作用诱导了离散动力系统$\mathbb{Z} \times X \to X$, $(n, x) \mapsto g^n x$. 类似地, 如果ξ是G的李代数$\mathfrak{g}$中的元素, 则单参数子群$\{\exp(t\xi) : t \in \mathbb{R}\}$诱导了流$\mathbb{R} \times X \to X$, $(t, x) \mapsto \exp(t\xi)x$. 更一般地, 齐性动力系统研究$G$的任一子群$H$在$X$上的平移作用

$$H \times X \to X, \qquad (h, x) \mapsto hx$$

生成的动力系统, 考察它的轨道和不变测度等性质.

为了得到深刻的动力系统性质, 我们需要对子群H和Γ的选取加以限制. 首先, 我们希望H中的元素可以趋于无穷远, 从而考察群作用的渐进行为. 于是, 我们假设:

(i) H是G的非紧闭子群(从而G也非紧).

另一方面, 在很大程度上, H-作用的非平凡动力系统性质是由Γ的不连通性导致的. 为了简化条件, 我们假设:

(ii) Γ是G的离散子群.

此外, 为了应用遍历论中的方法和结果, 我们还假设:

(iii) Γ的陪集空间X上存在G-不变的Borel概率测度μ_X(称为*Haar测度*, 存在时必唯一).

满足条件(ii)和(iii)的子群Γ称为G的*格点子群*(lattice). 如果空间X是紧的, 则称Γ为*余紧的*(cocompact); 否则, 称Γ为*非余紧的*(non-cocompact). 如

果X的子集E的闭包是紧集, 则称E为有界集. 本文重点讨论X中的有界H-轨道. 这只在Γ非余紧时才有非平凡的意义.

我们给出格点子群的两个基本例子.

例2.1. 加法群$\mathbb{R}^n$的子群$\mathbb{Z}^n$是余紧格点子群. 事实上, 空间$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$同胚于$n$ 维环面.

例2.2. 设$n \geq 2$. 特殊线性群$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$的子群$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$是非余紧格点子群. 在本文中, 我们记

$$X_n = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}). \tag{2.1}$$

关于空间X_n上不变概率测度的存在性, 见[58]. 鉴于这个空间的重要性, 我们给出它的非紧性的简短证明.

空间X_n非紧性的证明. 如果X_n紧, 则存在$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$的紧子集$K$满足$K\cdot\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. 此时有

$$K \cdot \mathbb{Z}^n = K \cdot (\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \cdot \mathbb{Z}^n) = (K \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})) \cdot \mathbb{Z}^n = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n.$$

这推出, 存在K中的序列(g_k)和$\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$中的序列$(v_k)$使得$g_k v_k \to 0$. 由于$K$紧, 不妨假设$g_k \to g$. 于是

$$v_k = g_k^{-1}(g_k v_k) \to g^{-1}0 = 0,$$

与$v_k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$矛盾. □

关于空间X_n中子集的有界性, Mahler[42]证明了下面的判别法则. 它在齐性动力系统和丢番图逼近之间起到了桥梁的作用.

定理2.3 (Mahler判别法则)**.** *记$\pi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to X_n$, $g \mapsto g \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$为投影映射. 设$\Omega$是$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$的子集. 则$\pi(\Omega)$在$X_n$中有界的充分必要条件为$\mathbb{R}^n$中的原点是集合$\{gv : g \in \Omega, v \in \mathbb{Z}^n\}$的孤立点.*

并非每个李群都有格点子群. 可以证明, 如果G存在格点子群, 则对任意$g \in G$有$|\det(\mathrm{Ad}(g))| = 1$, 其中$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$是伴随表示. 另一方面, 任意非紧连通半单李群总存在余紧格点子群, 也总存在非余紧格点子群. 而可解李群的格点子群(如果存在)只能是余紧的. 这些结论的证明和格点子群的其他性质, 见[46, 54, 58, 72].

齐性动力系统的一个基本定理是Moore遍历定理[52]. 对单李群的情况[2], 可以陈述如下.

[2]Moore遍历定理对半单李群的不可约格点子群也成立.

定理2.4 (单李群的Moore遍历定理)**.** 设G是中心有限的连通非紧单李群, $\Gamma \subset G$是格点子群. 则G在齐性空间$X = G/\Gamma$上的平移作用关于$Haar$测度μ_X是强混合的, 即对任意可测集$E_1, E_2 \subset X$有

$$\lim_{G \ni g \to \infty} \mu_X(gE_1 \cap E_2) = \mu_X(E_1)\mu_X(E_2).$$

特别地, 任意非紧闭子群$H \subset G$在X上的平移作用是遍历的, 即对任意H-不变可测集$E \subset X$有

$$\mu_X(E) = 0 \qquad \text{或} \qquad \mu_X(E) = 1.$$

Moore遍历定理推出, 如果$H \subset G$是非紧闭子群, 则X中的几乎所有点的H-轨道稠密. 如果X非紧, 则有界H-轨道一定是非稠密的. 因此, 集合

$$\{x \in X : Hx\text{有界}\} \tag{2.2}$$

关于Haar测度是零测集.

最后, 我们给出齐性动力系统的两个最基本的例子.

例2.5 (常负曲率曲面的测地流和极限圆流)**.** 设Σ是体积有限的常负曲率完备曲面. 则它的单位切丛$T^1\Sigma$同构于某个齐性空间$X = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$, 其中$\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$是格点子群. 在这一同构下, $T^1\Sigma$上的Liouville测度就是X上的Haar测度. 考虑$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$的单参数子群

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

则D和U在X上的平移作用生成的动力系统分别对应着$T^1\Sigma$上的测地流和极限圆流(见[11]). 从齐性动力系统的角度对这两个流进行研究始于Gelfand和Fomin[28]. 测地流和极限圆流具有非常不同的性质. 例如, 当Σ非紧时, 测地流的有界轨道可以非常复杂, 而极限圆流的有界轨道只能是周期轨(见[20]).

关于齐性动力系统更详细的介绍, 见[11, 22, 36, 69]等.

3. 幂幺系统

根据子群H的不同类型, 我们分情况讨论有界轨道的性质及其与丢番图逼近的联系. 首先给出几个定义.

定义3.1. 设G是连通非紧李群.

(1) 对于$g \in G$, 如果$\mathfrak{g}$上的线性变换$\mathrm{Ad}(g) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$是幂零的, 则称$g$为$\mathrm{Ad}_G$-幂幺的; 如果$\mathrm{Ad}(g)$是可对角化的, 则称$g$为$\mathrm{Ad}_G$-可对角化的.

(2) 设$\Gamma \subset G$是格点子群, $X = G/\Gamma$, $H \subset G$是连通非紧闭子群. 如果H由Ad_G-幂幺的元素生成, 则称H在X上的平移作用为*幂幺系统*; 如果H中的元素都是Ad_G-可对角化的, 则称H在X上的平移作用为*可对角化系统*.

幂幺系统和可对角化系统是齐性动力系统最重要的两种类型. 在某种意义上, 一般子群H的情况可以约化为对这两种情况的研究. 例2.5中的极限圆流是幂幺系统, 而测地流是可对角化系统.

本节讨论幂幺系统有界轨道的性质. 值得注意的是, 由Iwasawa分解可以看出, 如果H是非紧单李群, 则它由Ad_G-幂幺的元素生成. 因此, 本节的讨论包含H是非紧单李群的情况.

首先考虑$G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$的情况. 此时$X = X_3$(见(2.1)式). 取$H$是符号为$(2,1)$的广义正交群的单位分支$\mathrm{SO}^+(2,1)$. 它是非紧单李群. 1980年代, Margulis[43, 44]证明了下面的结果.

定理3.2. *空间X_3中的有界$\mathrm{SO}^+(2,1)$-轨道总是紧的.*

这一定理的背景是丢番图逼近中的Oppenheim猜想. 数论中的Meyer定理表明, 如果Q是$\mathbb{R}^n$上的非退化不定有理二次型, 则当$n \geq 5$时, 存在$v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$满足$Q(v) = 0$(见[67]). Oppenheim在[57]中猜想, 对于无理二次型, Meyer定理在逼近的意义下也成立. 猜想的条件后来被减弱为$n \geq 3$, 严格陈述如下.

猜想3.3 (Oppenheim猜想)**.** *设$n \geq 3$, Q是$\mathbb{R}^n$上的非退化不定二次型. 假设Q不是有理二次型的常数倍. 则对任意$\epsilon > 0$, 存在$v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$满足$|Q(v)| < \epsilon$.*[3]

容易证明, 如果猜想对某个$n = n_0$成立, 则它对$n > n_0$也成立. 于是, 只需证明猜想对$n = 3$成立. Cassels和Swinnerton-Dyer[16]与Raghunathan(未发表)发现, 猜想与定理3.2中的断言是等价的. 因此, Margulis证明的定理3.2推出了Oppenheim猜想成立. 在这个证明出现以前, 人们利用解析数论的方法, 证明了猜想对$n \geq 21$成立. Margulis的证明基于李群$\mathrm{SO}^+(2,1)$由幂幺元素生成这一事实, 以及幂幺单参数子群作用的动力系统性质.

[3] Oppenheim猜想对于$n = 2$是不成立的: 容易验证, 对任意$(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$有$|x_1^2 - (1+\sqrt{2})^2 x_2^2| \geq 1$.

Oppenheim猜想至今没有纯数论的完整证明. 关于Oppenheim猜想更精细的定量结果, 见[29, 41, 47].

下面简要说明定理3.2与Oppenheim猜想的关系. 考虑$\mathbb{R}^3$上的二次型

$$Q_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

则$\mathbb{R}^3$上的任意非退化不定二次型Q形如$Q = c(Q_0 \circ g)$, 其中c为非零常数, $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Oppenheim猜想与定理3.2的等价性容易由下面的命题推出.

命题3.4. *记$\pi : \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \to X_3$为投影映射. 则以下两个断言成立.*

(1) *轨道$\mathrm{SO}^+(2,1) \cdot \pi(g)$是有界集的充分必要条件是*

$$\inf_{v \in \mathbb{Z}^3 \smallsetminus \{0\}} |Q(v)| > 0.$$

(2) *轨道$\mathrm{SO}^+(2,1) \cdot \pi(g)$是闭集的充分必要条件是$Q$为有理二次型的常数倍.*

为了体现Mahler判别法则在齐性动力系统与数论之间的桥梁作用, 我们给出(1)的证明概要.

命题3.4(1)的证明. 记$H = \mathrm{SO}^+(2,1)$. 对任意实数a, 群H在曲面

$$\{v \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} : Q_0(v) = a\}$$

的连通分支上的作用是传递的. 于是, 对于$v \in \mathbb{R}^3$, $|Q_0(v)|$充分小等价于$\inf_{h \in H} \|hv\|$充分小. 因此,

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in \mathbb{Z}^3 \smallsetminus \{0\}} |Q(v)| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \inf_{v \in \mathbb{Z}^3 \smallsetminus \{0\}} |Q_0(gv)| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \inf_{v \in \mathbb{Z}^3 \smallsetminus \{0\}} \inf_{h \in H} \|hgv\| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{原点不是集合}\{hgv : h \in H, v \in \mathbb{Z}^3\}\text{的孤立点.}
\end{aligned}$$

由Mahler判别法则, 这等价于轨道$H\pi(g)$无界. □

注3.5. 命题3.4在高维时也成立. 结合Meyer定理, 这推出当$n \geq 5$时, 对任意和为n的正整数p与q, 空间X_n中的$\mathrm{SO}^+(p,q)$-轨道总是无界的.

1990年代初, Ratner[59, 60, 61, 62]证明了测度分类定理、轨道闭包定理、等度分布定理等一系列重要结果(另见[49]). 其中的轨道闭包定理如下.

定理3.6 (Ratner轨道闭包定理)**.** *设G是连通非紧李群, $\Gamma \subset G$是格点子群, $X = G/\Gamma$, $H \subset G$是连通非紧闭子群. 假设H由Ad_G-幂幺的元素生成. 则对任意$x \in X$, 存在G的包含H的连通闭子群L满足$\overline{Hx} = Lx$.*

容易由定理3.6推出定理3.2. 另一方面, Ratner的工作还推出:

定理3.7. *在定理3.6的条件下, 如果X非紧, 则集合*(2.2)*包含在X的可数多个真子流形的并集之中, 从而其Hausdorff维数小于X的维数.*

由于Ratner的工作, 对幂幺系统的定性了解已经比较完备(见[21, 45, 53, 63]). 但是, 从定量的角度, 幂幺系统仍然有很多未解决的问题, 见[40, 48]等.

4. 多参数可对角化系统

以下两节讨论可对角化系统, 即子群H中的元素都是Ad_G-可对角化的情况. 如果$\dim H = 1$, 则称相应的动力系统为单参数的; 如果$\dim H > 1$, 则称相应的动力系统为多参数的. 这两种情况的可对角化系统具有非常不同的性质. 在本节中, 我们讨论多参数可对角化系统. 对于这种情况, 人们希望得到与幂幺系统类似的性质. 但是, 这一计划还远没有完成. 现阶段已知的主要结果集中在H为G的极大$\mathbb{R}$-分裂子环面的情况.

为了避免技术性的条件, 本文只考虑$G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, 并且$H$等于子群

$$A = \{\mathrm{diag}(e^{t_1}, \ldots, e^{t_n}) : t_i \in \mathbb{R}, t_1 + \cdots + t_n = 0\}$$

的情况. 注意$\dim A = n - 1$. 因此, 当$n \geq 3$时, 相应的动力系统是多参数的. 关于有界A-轨道, Margulis[48]猜想与定理3.2类似的断言成立, 即:

猜想4.1. *当$n \geq 3$时, 空间X_n中的有界A-轨道总是紧的.*

当$n = 3$时, 从丢番图逼近的角度对这一猜想的等价陈述也曾出现于Cassels和Swinnerton-Dyer的工作[16]中(见下述猜想4.6). 关于这个猜想, 至今最重要的进展是由Einsiedler、Katok和Lindenstrauss[25]做出的. 他们通过研究X_n上A-不变测度的性质, 证明了:

定理4.2. *当$n \geq 3$时, 集合*

$$\{x \in X_n : Ax\text{有界}\}$$

的Hausdorff维数等于$n-1$.

可以证明, 空间X_n中存在紧A-轨道, 并且只有可数多个. 因此, 集合

$$\{x \in X_n : Ax\text{紧}\}$$

的Hausdorff维数也是$n-1$. Einsiedler等[25]还证明了下面更强的结果.

定理4.3. *设$n \geq 3$, $A^+ \subset A$是有内点的子半群, $g \in A^+$是内点. 考虑$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$的子群*

$$U(g) = \{u \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : \lim_{k \to +\infty} g^{-k} u g^k = I_n\}.$$

则对任意$x \in X_n$, 集合

$$\{u \in U(g) : A^+ ux \text{有界}\}$$

的Hausdorff维数等于0.

利用极小集的概念, 可以给出猜想4.1的等价陈述. 对于$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$的子群$S$和$X_n$的子集$Y$, 如果$Y$是$S$-不变闭集, 并且$Y$中没有非空$S$-不变闭真子集, 则称$Y$是$S$-极小集. An和Weiss[8]证明了:

定理4.4. *设$n \geq 3$. 对于$1 \leq i < j \leq n$, 记A_{ij}为A中第i个对角元与第j个对角元相等的矩阵构成的子群. 则以下两个陈述等价.*

(1) *猜想4.1对n成立.*
(2) *对每个A_{ij}, 空间X_n中的任意紧A-极小集也是A_{ij}-极小集.*

猜想4.1和定理4.3与丢番图逼近中的Littlewood猜想有紧密的关系. 对于实数a, 我们记$\langle a \rangle$为a到整数集的距离, 即$\langle a \rangle = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |a - k|$. Littlewood于1930年左右提出了下面的猜想.

猜想4.5 (Littlewood猜想)**.** *对任意$a, b \in \mathbb{R}$有*

$$\inf_{q \in \mathbb{N}} q \langle qa \rangle \langle qb \rangle = 0.$$

Littlewood猜想是丢番图逼近中最重要的未解问题之一. Cassels和Swinnerton-Dyer[16]提出了下面的猜想, 并证明了它可以推出Littlewood猜想.

猜想4.6. *设f_1, f_2, f_3是$\mathbb{R}^3$上线性无关的线性型, 并考虑$\mathbb{R}^3$上的三次型$F = f_1 f_2 f_3$. 假设F不是有理三次型的常数倍. 则对任意$\epsilon > 0$, 存在$v \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$满足$|F(v)| < \epsilon$.*

容易看出猜想4.6与Oppenheim猜想的类似之处. 与定理3.2和Oppenheim猜想的等价性类似, 利用Mahler判别法则, 可以证明$n = 3$时的猜想4.1与猜想4.6等价. 因此, 猜想4.1可以推出Littlewood猜想.

另一方面, Einsiedler等[25]利用定理4.3, 证明了Littlewood猜想在差一个零维集合的意义下成立, 即:

定理4.7. 集合

$$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\inf_{q\in\mathbb{N}} q\langle qa\rangle\langle qb\rangle>0\}$$

的*Hausdorff*维数等于0.

为了说明定理4.3与Littlewood猜想的关系, 考虑$\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$的子半群

$$A^+=\{\mathrm{diag}(e^{t_1},e^{t_2},e^{-(t_1+t_2)}):t_1,t_2\geq 0\}. \tag{4.1}$$

对于$a,b\in\mathbb{R}$, 我们记

$$u_{a,b}=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad x_{a,b}=u_{a,b}\cdot\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}).$$

利用Mahler判别法则, 可以证明:

命题4.8. 空间X_3中的轨道$A^+x_{a,b}$有界的充分必要条件是

$$\inf_{q\in\mathbb{N}} q\langle qa\rangle\langle qb\rangle>0.$$

利用命题4.8, 容易由定理4.3推得定理4.7:

定理4.7的证明. 在定理4.3中, 取$n=3$, A^+为(4.1)式给出的子半群. 则$g=\mathrm{diag}(2,2,1/4)$是A^+的内点. 此时$U(g)=\{u_{a,b}:a,b\in\mathbb{R}\}$. 因此, 集合$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:A^+x_{a,b}$有界$\}$的Hausdorff维数等于0. 再利用命题4.8即得定理4.7. □

5. 单参数可对角化系统

本节讨论单参数可对角化系统的有界轨道. 出于习惯, 这时我们把子群H改记为F. 下面的结果首先由Margulis[45]以猜想的形式提出, 随后被Kleinbock和Margulis[34]所证明(另见[37]).

定理5.1. 设G是非紧李群, $\Gamma\subset G$是非余紧格点子群, $X=G/\Gamma$, F是G的Ad_G-可对角化单参数子群. 则集合

$$\{x\in X:Fx\text{有界}\} \tag{5.1}$$

的*Hausdorff*维数等于全空间X的维数.

将定理5.1与定理3.7和定理4.2做比较, 可以看出单参数可对角化系统的不同之处. 在这一基础上, An、Guan和Kleinbock[6]提出了更强的猜想. 为了叙述这个猜想, 我们先介绍Schmidt博弈的致胜集的概念[64].

定义5.2 (Schmidt博弈及其致胜集). 给定完备度量空间X, 子集$S \subset X$, 和实数$\alpha, \beta \in (0,1)$. Alice与Bob两人按下述规则进行博弈: Bob首先选取X中的闭球B_0. 在Bob选取了闭球B_i之后($i \geq 0$), Alice在B_i中选取半径为B_i半径α倍的闭球A_i, 然后Bob在A_i中选取半径为A_i半径β倍的闭球B_{i+1}. 这样得到了闭球的无穷序列

$$B_0 \supset A_0 \supset B_1 \supset A_1 \supset \cdots.$$

所有这些闭球的交集为单点集, 记为$\{x_\infty\}$. 如果$x_\infty \in S$, 则约定*Alice*获胜; 否则约定*Bob*获胜. 如果Alice在博弈中有必胜策略, 则称S为(α,β)-致胜集((α,β)-winning set). 如果对任意$\beta \in (0,1)$, S均为(α,β)-致胜集, 则称S为α-致胜集. 如果存在$\alpha \in (0,1)$使得S为α-致胜集, 则称S为致胜集.

容易看出, 如果S为致胜集, 则它在X中稠密. Schmidt[64]还证明了:

命题5.3. *设X是完备度量空间.*

(1) *对任意$\alpha \in (0,1)$, 可数多个X的α-致胜子集的交集仍然为α-致胜集.*
(2) *如果X是黎曼流形, 则X的致胜子集的Hausdorff维数等于全空间X的维数.*

文章[6]中提出的猜想如下.

猜想5.4. *设G, Γ, X如定理5.1所述, 并在流形X上赋予由G上的右不变黎曼结构诱导而得的黎曼结构. 则存在$\alpha \in (0,1)$, 使得对G的任意Ad_G-可对角化单参数子群F, 集合(5.1)均为X的α-致胜子集[4].*

由命题5.3, 这个猜想推出: 对G的任意可数多个Ad_G-可对角化单参数子群$\{F_k\}$, 集合

$$\{x \in X : \text{所有} F_k x \text{有界}\}$$

的Hausdorff维数等于全空间X的维数. 关于这一猜想, 已知的结果如下.

定理5.5. *下面的结论成立.*

(1) *当G为$\mathbb{R}$-秩为1的半单李群时, 猜想5.4成立*[19].
(2) *当$G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$时, 猜想5.4成立*[6].
(3) *当G为有限多个$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$的乘积时, 猜想5.4成立*[4].

---

[4]文章[6]提出了更强的猜想, 即集合(5.1)是*超平面绝对致胜集*. 这种致胜集的概念是在[14, 38]中引入的, 具有更好的性质. 本文为了叙述方便, 只对定义5.2中给出的致胜集概念进行讨论.

(4) 对于$G=\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma=\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$和

$$F=\{\mathrm{diag}(e^{t/p}I_p,e^{-t/q}I_q):t\in\mathbb{R}\},\qquad p+q=n,$$

集合(5.1)是致胜集[15, 7].

(5) 对于$G=\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma=\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$和

$$F=\{\mathrm{diag}(e^{rt}I_{n-2},e^{st},e^{-t}):t\in\mathbb{R}\},\qquad r\geq s\geq 0,\quad (n-2)r+s=1,$$

集合(5.1)是致胜集[30].

猜想5.4的背景为丢番图逼近中已被证明的Schmidt猜想. 对于$d\geq 1$, 考虑集合

$$W_d=\{(r_1,\ldots,r_d)\in\mathbb{R}^d:r_i\geq 0,r_1+\cdots+r_d=1\}.$$

对于$\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_d)\in W_d$, 定义$\mathbb{R}^d$的子集

$$\mathrm{Bad}(\mathbf{r})=\{(a_1,\ldots,a_d)\in\mathbb{R}^d:\inf_{q\in\mathbb{N}}\max_{1\leq i\leq d}q^{r_i}\langle qa_i\rangle>0\}.$$

集合$\mathrm{Bad}(\mathbf{r})$中的向量称为权为$\mathbf{r}$的劣态逼近向量(badly approximable vectors). 当$d=1$时, 定义退化为劣态逼近数的概念. 劣态逼近向量是丢番图逼近的基本研究对象. Schmidt[64, 65]证明了$\mathrm{Bad}(\frac{1}{d},\ldots,\frac{1}{d})$是致胜集, 并在[66]中对$d=2$的情况提出了下面的猜想.

猜想5.6 (Schmidt猜想)**.** $\mathrm{Bad}(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cap\mathrm{Bad}(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\neq\varnothing$.

Schmidt猜想被Badziahin、Pollington和Velani[9]所证明. 他们还证明了对某种可数多个(特别地, 任意有限多个)权$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots\in W_2$, 交集$\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathrm{Bad}(\mathbf{r}_k)$的Hausdorff维数等于2. 随后, An[1]利用不同的方法证明了这一结果对任意可数多个权也成立, 并在[2]中证明了:

定理5.7. *存在$\alpha\in(0,1)$, 使得对任意$\mathbf{r}\in W_2$, $\mathrm{Bad}(\mathbf{r})$是$\mathbb{R}^2$的α-致胜子集.*

由命题5.3, 这给出了Schmidt猜想的另一个证明. 进一步的结果见[3, 10, 55]. Beresnevich[13]把上述Badziahin等[9]的结果推广到了$d\geq 3$的情况, 从而证明了高维的Schmidt猜想. 最近, Yang[71]证明了Beresnevich的结果对任意可数多个权也成立. 另外, Guan和Yu[31]证明了当$r_1=\cdots=r_{d-1}\geq r_d$时, $\mathrm{Bad}(\mathbf{r})$是致胜集. 但是, 对于一般的权$\mathbf{r}$, $\mathrm{Bad}(\mathbf{r})$是否为致胜集仍然是一个有挑战性的问题.

下面说明劣态逼近向量与有界轨道的关系. 取$n=d+1$. 对于$\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_d)\in W_d$, 考虑$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$的单参数子半群

$$F_{\mathbf{r}}^{+}=\{\mathrm{diag}(e^{r_1t},\ldots,e^{r_dt},e^{-t}):t\geq 0\}.$$

对于行向量$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, 记

$$x_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} I_d & \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \in X_n.$$

与命题4.8类似, 利用Mahler判别法则, Dani[18]和Kleinbock[33]证明了:

命题5.8 (Dani-Kleinbock对应). *轨道$F_{\mathbf{r}}^{+} x_{\mathbf{a}}$有界的充分必要条件是$\mathbf{a} \in \mathrm{Bad}(\mathbf{r})$.*

考虑X_3中的2维环面$\mathbb{T}^2 = \{x_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2\}$. 由命题5.8, Schmidt猜想等价于: 存在$x \in \mathbb{T}^2$使得轨道$F_{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})}^{+} x$与$F_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3})}^{+} x$同时有界. 而定理5.7可以从动力系统的角度重新叙述为: 对(4.1)式给出的A^+的任意单参数子半群F^+, 集合

$$\{x \in \mathbb{T}^2 : F^+ x \text{有界}\}$$

是$\mathbb{T}^2$的致胜子集. 因此, 猜想5.4可以视为动力系统意义的Schmidt猜想. 文章[6]还对*扩张极限球子群*(expanding horospherical subgroup)提出了类似的猜想. 为了避免过于技术化, 本文不再讨论.

References

[1] An J. Badziahin-Pollington-Velani's theorem and Schmidt's game. Bull Lond Math Soc, 2013, 45: 721–733

[2] An J. 2-dimensional badly approximable vectors and Schmidt's game. Duke Math J, 2016, 165: 267–284

[3] An J, Beresnevich V, Velani S. Badly approximable points on planar curves and winning. Adv Math, 2018, 324: 148–202

[4] An J, Ghosh A, Guan L, Ly T. Bounded orbits of diagonalizable flows on finite volume quotients of products of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. ArXiv:1605.08510, 2016

[5] An J, Guan L. Bounded orbits of homogeneous dynamics (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1623–1634

[6] An J, Guan L, Kleinbock D. Bounded orbits of diagonalizable flows on $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. Int Math Res Not, 2015, 2015: 13623–13652

[7] An J, Guan L, Kleinbock D. Nondense orbits and generalized indefinite binary forms. In preparation

[8] An J, Weiss B. Remarks on minimal sets and conjectures of Cassels, Swinnerton-Dyer, and Margulis. Mosc J Comb Number Theory, 2013, 3: 24–43

[9] Badziahin D, Pollington A, Velani S. On a problem in simultaneous Diophantine approximation: Schmidt's conjecture. Ann of Math, 2011, 174: 1837–1883

[10] Badziahin D, Velani S. Badly approximable points on planar curves and a problem of Davenport. Math Ann, 2014, 359: 969–1023

[11] Bekka M, Mayer M. Ergodic Theory and Topological Dynamics of Group Actions on Homogeneous Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 2000

[12] Benoist Y. Recurrence on the space of lattices. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Seoul, 2014), vol. III. Seoul: Kyung Moon Sa Co Ltd, 2014, 11–25

[13] Beresnevich V. Badly approximable points on manifolds. Invent Math, 2015, 202: 1199–1240

[14] Broderick R, Fishman L, Kleinbock D, Reich A, Weiss B. The set of badly approximable vectors is strongly C^1 incompressible. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2012, 153: 319–339

[15] Broderick R, Fishman L, Simmons D. Badly approximable systems of affine forms and incompressibility on fractals. J Number Theory, 2013, 133: 2186–2205

[16] Cassels J, Swinnerton-Dyer H. On the product of three homogeneous linear forms and the indefinite ternary quadratic forms. Philos Trans Roy Soc London Ser A, 1955, 248: 73–96

[17] Cheung Y, Chevallier N. Hausdorff dimension of singular vectors. Duke Math J, 2016, 165: 2273–2329

[18] Dani S. Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation. J Reine Angew Math, 1985, 359: 55–89

[19] Dani S. Bounded orbits of flows on homogeneous spaces. Comment Math Helv, 1986, 61: 636–660

[20] Dani S. On badly approximable numbers, Schmidt games and bounded orbits of flows. In: Number Theory and Dynamical Systems (York, 1987). Cambridge: Cambridge University Press, 1989, 69–86

[21] Dani S. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), vol II. Basel: Birkhäuser, 1995, 780–789

[22] Dani S. Dynamical systems on homogeneous spaces. In: Dynamical Systems, Ergodic Theory and Applications, 2nd ed. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 100. Berlin: Springer-Verlag, 2000, 264–359

[23] Das T, Fishman L, Simmons D, Urbański M. A variational principle in the parametric geometry of numbers, with applications to metric Diophantine approximation. C R Math Acad Sci Paris, 2017, 355: 835–846

[24] Einsiedler M. Applications of measure rigidity of diagonal actions. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 1740–1759

[25] Einsiedler M, Katok A, Lindenstrauss L. Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture. Ann of Math, 2006, 164: 513–560

[26] Einsiedler M, Lindenstrauss E. Diagonalizable flows on locally homogeneous spaces and number theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), vol. II. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 1731–1759

[27] Eskin A. Counting problems and semisimple groups. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin, 1998), vol. II. Bielefeld: Doc Math, 1998, 539–552

[28] Gelfand I, Fomin S. Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature. Uspehi Matem Nauk, 1952, 7: 118–137

[29] Götze F, Margulis G. Distribution of values of quadratic forms at integral points. ArXiv:1004.5123, 2010

[30] Guan L, Wu W. Bounded orbits of certain diagonalizable flows on $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Trans Amer Math Soc, in press

[31] Guan L, Yu J. Weighted badly approximable vectors and games. Int Math Res Not, in press

[32] Kadyrov S, Kleinbock D, Lindenstrauss E, Margulis G. Singular systems of linear forms and non-escape of mass in the space of lattices. J Anal Math, 2017, 133: 253–277

[33] Kleinbock D. Flows on homogeneous spaces and Diophantine properties of matrices. Duke Math J, 1998, 95: 107–124

[34] Kleinbock D, Margulis G. Bounded orbits of nonquasiunipotent flows on homogeneous spaces. Amer Math Soc Transl, 1996, 171: 141–172

[35] Kleinbock D, Margulis G. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds. Ann of Math, 1998, 148: 339–360

[36] Kleinbock D, Shah N, Starkov A. Dynamics of subgroup actions on homogeneous spaces of Lie groups and applications to number theory. In: Handbook of Dynamical Systems, vol. 1A. Amsterdam: North-Holland, 2002, 813–930

[37] Kleinbock D, Weiss B. Modified Schmidt games and a conjecture of Margulis. J Mod Dyn, 2013, 7: 429–460

[38] Kleinbock D, Weiss B. Values of binary quadratic forms at integer points and Schmidt games. In: Recent Trends in Ergodic Theory and Dynamical Systems. Contemp Math, vol. 631. Providence, RI: Amer Math Soc, 2015, 77–92

[39] Liao L, Shi R, Solan O, Tamam N. Hausdorff dimension of weighted singular vectors. ArXiv:1605.01287, 2016

[40] Lindenstrauss E. Equidistribution in homogeneous spaces and number theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. I. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 531–557

[41] Lindenstrauss E, Margulis G. Effective estimates on indefinite ternary forms. Israel J Math, 2014, 203: 445–499

[42] Mahler K. On lattice points in n-dimensional star bodies I: existence theorems. Proc Roy Soc London Ser A, 1946, 187: 151–187

[43] Margulis G. Indefinite quadratic forms and unipotent flows on homogeneous spaces. In: Dynamical Systems and Ergodic Theory (Warsaw, 1986). Banach Center Publ, vol. 23. Warsaw: Polish Scientific Publishers PWN, 1989, 399–409

[44] Margulis G. Discrete subgroups and ergodic theory. In: Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups (Oslo, 1987). Boston, MA: Academic Press, 1989, 377–398

[45] Margulis G. Dynamical and ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces with applications to number theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990), vol. I. Tokyo: Math Soc Japan, 1991, 193–215

[46] Margulis G. Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1991

[47] Margulis G. Oppenheim conjecture. In: Fields Medallists' Lectures. World Sci Ser 20th Century Math, vol. 5. River Edge, NJ: World Sci Publ, 1997, 272–327

[48] Margulis G. Problems and conjectures in rigidity theory. In: Mathematics: Frontiers and Perspectives. Providence, RI: Amer Math Soc, 2000, 161–174

[49] Margulis G, Tomanov G. Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces. Invent Math, 1994, 116: 347–392.

[50] Marklof J. The low-density limit of the Lorentz gas: periodic, aperiodic and random. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Seoul, 2014), vol. III. Seoul: Kyung Moon Sa Co Ltd, 2014, 623–646

[51] Michel P, Venkatesh A. Equidistribution, L-functions and ergodic theory: on some problems of Yu. Linnik. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), vol. II. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 421–457

[52] Moore C. Ergodicity of flows on homogeneous spaces. Amer J Math, 1966, 88: 154–178

[53] Morris, D. Ratner's Theorems on Unipotent Flows. Chicago, IL: University of Chicago Press, 2005

[54] Morris, D. Introduction to Arithmetic Groups. Deductive Press, 2015

[55] Nesharim E, Simmons D. Bad(s, t) is hyperplane absolute winning. Acta Arith, 2014, 164: 145–152

[56] Oh H. Dynamics on geometrically finite hyperbolic manifolds with applications to Apollonian circle packings and beyond. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 1308–1331

[57] Oppenheim A. The minima of indefinite quaternary quadratic forms. Proc Nat Acad Sci USA, 1929, 15: 724–727

[58] Raghunathan M. Discrete Subgroups of Lie Groups. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1972

[59] Ratner M. Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups. Invent Math, 1990, 101: 449–482

[60] Ratner M. On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups. Acta Math, 1990, 165: 229–309

[61] Ratner M. On Raghunathan's measure conjecture. Ann of Math, 1991, 134: 545–607

[62] Ratner M. Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows. Duke Math J, 1991, 63: 235–280

[63] Ratner M. Interactions between ergodic theory, Lie groups, and number theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), vol I. Basel: Birkhäuser, 1995, 157–182

[64] Schmidt W. On badly approximable numbers and certain games. Trans Amer Math Soc, 1966, 123: 178–199

[65] Schmidt W. Diophantine Approximation. Lecture Notes in Mathematics, vol. 785. Berlin: Springer, 1980.

[66] Schmidt W. Open problems in Diophantine approximation. In: Diophantine Approximations and Transcendental Numbers (Luminy, 1982). Progr Math, vol. 31. Boston, MA: Birkhäuser, 1983, 271–287

[67] Serre J-P. A Course in Arithmetic. Graduate Texts in Mathematics, vol. 7. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973

[68] Shah N. Equidistribution of translates of curves on homogeneous spaces and Dirichlet's approximation. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 1332–1343

[69] Starkov A. Dynamical Systems on Homogeneous Spaces. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000

[70] Ullmo E. Théorie ergodique et géométrie arithmétique. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, 2002), vol. II. Beijing: Higher Ed Press, 2002, 197–206

[71] Yang L. Badly approximable points on curves and unipotent orbits in homogeneous spaces. ArXiv:1703.03461, 2017

[72] Zimmer R. Ergodic Theory and Semisimple Groups. Basel: Birkhäuser, 1984