第五章　行列式

域F上方阵的行列式是F中的元素, 满足一些很好的性质. 例如, 方阵可逆的充分必要条件是它的行列式非零, 方阵乘积的行列式等于行列式的乘积等. 在对矩阵的研究中, 行列式起到了非常重要的作用.

这里我们采用线性映射的观点. 通过与列向量或行向量做乘法, 可以把矩阵视为线性映射. 我们首先利用多重交错线性函数的性质, 对任意有限维线性空间到自身的线性映射定义它的行列式, 然后把方阵的行列式定义为相应的线性映射的行列式. 方阵行列式的一些基本性质也将由线性映射行列式的性质导出.

§5.1　对称群

集合$\{1,\ldots,n\}$到自身的可逆映射称为n**次置换**(permutation of degree n). 所有n次置换在映射复合下构成一个群, 称为n**次对称群**(symmetric group of degree n), 记为S_n. 容易看出, $|S_n| = n!$. 如果置换$\sigma \in S_n$互换$\{1,\ldots,n\}$中的某两个数字, 而保持其他数字不动, 则称σ为**对换**(transposition). 对于置换$\sigma \in S_n$, 我们记

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

如果σ是互换数字s和t的对换, 则记$\sigma = (s,t)$.

例 5.1. $S_1 = \{\mathrm{id}\}$, $S_2 = \{\mathrm{id}, (1,2)\}$,

$$S_3 = \left\{\mathrm{id}, (1,2), (2,3), (3,1), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\},$$

这里id是相应集合上的恒同置换.

我们称S_n中的$n-1$个对换

$$\{(i,i+1) \mid 1 \le i \le n-1\}$$

为**相邻数字的对换**(transposition of adjacent digits).

命题 5.1. 置换群S_n中相邻数字的对换生成S_n. 也就是说, 对任意$\sigma \in S_n$, 存在相邻数字的对换$\sigma_1,\ldots,\sigma_k$使得$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$.

证明. 用归纳法. 命题在$n=1$时无需证明. 假设$n \ge 2$, 并且命题对$n-1$成立. 设$\sigma \in S_n$. 我们分两种情形证明σ可以表示为相邻数字对换的乘积.

情形1. 设$\sigma(n) = n$. 则σ限制在$\{1,\ldots,n-1\}$上是S_{n-1}中的元素, 从而归纳假设保证了σ可以表示为相邻数字对换的乘积.

情形2. 设$\sigma(n) < n$. 记$\tau_i = (i,i+1)$. 则$\tau_{n-1}\cdots\tau_{\sigma(n)}\sigma(n) = n$. 由情形1, 存在相邻数字的对换$\sigma_1,\ldots,\sigma_k$使得$\tau_{n-1}\cdots\tau_{\sigma(n)}\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_k$, 即$\sigma = \tau_{\sigma(n)}\cdots\tau_{n-1}\sigma_1\cdots\sigma_k$. □

对于$\sigma \in S_n$, 我们称

$$\ell(\sigma) = \#\{(i,j) \mid i,j \in \{1,\ldots,n\}, i<j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

为σ的**逆序数**(number of inversions), 并称$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$ 为σ的**符号**(sign). 如果$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$, 则

称σ为**偶置换**(even permutation); 如果$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$, 则称σ为**奇置换**(odd permutation).

例 5.2. 设$n\geq 2$, I是$\{1,\ldots,n\}$的子集, $1\leq |I|<n$. 我们定义置换$\sigma_I\in S_n$如下: 记$k=|I|$, $\Sigma_I=\sum_{i\in I} i$, $I^c=\{1,\ldots,n\}\setminus I$. 如果

$$I=\{i_1,\ldots,i_k\},\quad i_1<\cdots<i_k,$$
$$I^c=\{i'_1,\ldots,i'_{n-k}\},\quad i'_1<\cdots<i'_{n-k},$$

则定义

$$\sigma_I=\begin{pmatrix}1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n\\ i_1 & \cdots & i_k & i'_1 & \cdots & i'_{n-k}\end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

置换σ_I的逆序数为

$$\begin{aligned}\ell(\sigma_I)&=\#\{(r,s)\mid i_r>i'_s\}=\sum_{r=1}^{k}\#\{s\mid i_r>i'_s\}\\ &=\sum_{r=1}^{k}\#(\{1,\ldots,i_r\}\cap I^c)=\sum_{r=1}^{k}(i_r-r)=\Sigma_I-\frac{k(k+1)}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{sgn}(\sigma_I)=(-1)^{\Sigma_I-\frac{k(k+1)}{2}}. \tag{5.2}$$

置换的符号可以用下面的表达式来表示.

命题 5.2. 对任意$\sigma\in S_n$, 有

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}. \tag{5.3}$$

更一般地, 如果$(d_1,\ldots,d_n)$是数字$\{1,\ldots,n\}$的排列, 则

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(d_j)-\sigma(d_i)}{d_j-d_i}. \tag{5.4}$$

证明. 容易看出, (5.3)式右边的乘积中有$\ell(\sigma)$项取负号. 因此该乘积与$\mathrm{sgn}(\sigma)$ 同号. 而该乘积的绝对值等于1. 因此(5.3)成立. 另一方面, 在不计次序的意义下, (5.4)式与(5.3)式右边乘积中的$\frac{n(n-1)}{2}$项相同. 因此(5.4) 也成立. □

我们会多次用到下面的性质.

命题 5.3. (1) 映射$\mathrm{sgn}: S_n\to\{1,-1\}$是群同态, 即对任意$\sigma,\tau\in S_n$有

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau).$$

(2) 如果$\sigma\in S_n$是k个对换的乘积, 则$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^k$. 特别地, 对换是奇置换.

证明. (1) 由于$(\tau(1),\ldots,\tau(n))$是数字$\{1,\ldots,n\}$的排列, 由命题5.2,

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}.$$

因此

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau).$$

(2) 首先证明如果$\sigma\in S_n$是对换, 则$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$. 设$\sigma=(s,t)$, $s<t$. 则

$$\begin{aligned}&\{(i,j)\mid i,j\in\{1,\ldots,n\}, i<j, \sigma(i)>\sigma(j)\}\\ &=\{(s,t),(s,s+1),\ldots,(s,t-1),(s+1,t),\ldots,(t-1,t)\}.\end{aligned}$$

从而$\ell(\sigma) = 2(t-s-1)+1$是奇数, 因此$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$. 现在设$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, 其中$\sigma_i$是对换. 由(1), 有$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma_1) \cdots \mathrm{sgn}(\sigma_k) = (-1)^k$. □

推论 5.4. 所有n次偶置换构成的集合A_n是S_n的子群, 并且当$n \geq 2$时有$|A_n| = \frac{1}{2}n!$.

证明. 为了证明A_n是S_n的子群, 我们需要说明: (1)S_n中的恒同置换id是偶置换; (2) 如果$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau) = 1$, 则$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = 1$; (3) 如果$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$, 则$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = 1$. (1)是显然的, (2)和(3)是命题5.3(1)的直接推论.

假设$n \geq 2$. 由命题5.3(2), $A_n \neq S_n$. 取定$\tau \in S_n \setminus A_n$. 由命题5.3(1), 可以定义映射

$$\rho_1 : A_n \to S_n \setminus A_n, \quad \rho_1(\sigma) = \sigma\tau,$$
$$\rho_2 : S_n \setminus A_n \to A_n, \quad \rho_2(\sigma) = \sigma\tau^{-1}.$$

注意到$\rho_1 \circ \rho_2$和$\rho_2 \circ \rho_1$是恒同映射. 因此ρ_1与ρ_2可逆. 由于集合A_n与$S_n \setminus A_n$之间存在可逆映射, 所以$|A_n| = |S_n \setminus A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{1}{2}n!$. □

群A_n称为n**次交错群**(alternating group of degree n).

例 5.3. $A_1 = \{\mathrm{id}\}$, $A_2 = \{\mathrm{id}\}$,

$$A_3 = \left\{\mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

习题 5.1.

1. 列出A_4中的所有元素.
2. 求所有正整数n, 使得置换$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ n & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in A_n$.
3. 设$\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$是$F^{n\times 1}$的标准基. 对$\sigma \in S_n$, 记$R(\sigma) \in F^{n\times n}$为第$j$列等于$\epsilon_{\sigma(j)}$ 的(可逆)矩阵. 证明映射$R : S_n \to \mathrm{GL}_n(F)$是群同态, 即对任意$\sigma, \tau \in S_n$有$R(\sigma\tau) = R(\sigma)R(\tau)$.
4. 设$\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$是$F^n$的标准基. 对$\sigma \in S_n$, 记$R'(\sigma) \in F^{n\times n}$为第$i$行等于$\delta_{\sigma(i)}$的矩阵. 等式$R'(\sigma\tau) = R'(\sigma)R'(\tau)$是否成立?

§5.2 多重线性函数

设V是域F上的线性空间, r是正整数.

定义 5.1. 映射$L : V^r \to F$称为V上的r**重线性函数**(r-linear function)或r**重线性形式**(r-linear form), 如果对任意指标$1 \leq i \leq r$和任意给定的向量$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_r \in V$, 映射

$$V \to F, \quad \alpha_i \mapsto L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

是线性函数.

我们把V上的所有r重线性函数的集合记为$\mathrm{M}^r(V)$, 并在它上面定义加法和纯量乘法如下:

$$(L_1 + L_2)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = L_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + L_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_r), \quad \forall L_1, L_2 \in \mathrm{M}^r(V),$$
$$(cL)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \ldots, \alpha_r), \quad \forall c \in F, L \in \mathrm{M}^r(V).$$

容易看出, $\mathrm{M}^r(V)$是线性空间. 注意$\mathrm{M}^1(V) = V^*$.

例 5.4. 设$f_1,\dots,f_r\in V^*$, 并定义$f_1\otimes\cdots\otimes f_r: V^r\to F$为

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_r(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=f_1(\alpha_1)\cdots f_r(\alpha_r).$$

则$f_1\otimes\cdots\otimes f_r\in \mathrm{M}^r(V)$.

例 5.5. 线性空间上的2重线性函数称为**双线性函数**(bilinear function)或**双线性形式**(bilinear form). 设$A\in F^{n\times n}$. 则映射

$$L:(F^{n\times 1})^2\to F,\quad L(X,Y)=Y^tAX$$

是$F^{n\times 1}$上的双线性函数.

为了定义线性映射的行列式, 我们需要下面的概念.

定义 5.2. 多重线性函数$L\in\mathrm{M}^r(V)$称为**交错**(alternating)的, 如果某两个变量相同时L取值是0, 即对任意不同的$s,t\in\{1,\dots,r\}$, 有

$$\alpha_s=\alpha_t\quad\Longrightarrow\quad L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=0.$$

我们把V上的r重交错线性函数的集合记为$\Lambda^r(V)$. 容易看出, 它是$\mathrm{M}^r(V)$的子空间. 我们约定$\Lambda^1(V)=V^*$.

例 5.6. 设$f_1,f_2\in V^*$. 定义

$$f_1\wedge f_2=f_1\otimes f_2-f_2\otimes f_1,$$

即

$$f_1\wedge f_2(\alpha_1,\alpha_2)=f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2)-f_1(\alpha_2)f_2(\alpha_1).$$

则$f_1\wedge f_2\in\Lambda^2(V)$. 注意到

$$f_1\wedge f_2=-f_2\wedge f_1,$$

并且$f\wedge f=0$.

例 5.7. 设$\{f_1,\dots,f_{2n}\}$是F^{2n}的标准基的对偶基. F^{2n}上的交错双线性函数

$$\omega_0=\sum_{i=1}^n f_i\wedge f_{n+i}$$

称为**标准辛形式**(standard symplectic form). 如果$\alpha=(x_1,\dots,x_{2n})$, $\beta=(y_1,\dots,y_{2n})$, 则

$$\omega_0(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n(x_iy_{n+i}-x_{n+i}y_i).$$

命题 5.5. 设$r\geq 2$.

(1) 设$L\in\mathrm{M}^r(V)$. 假设某两个相邻变量相同时L取值是0, 即对任意$1\leq i\leq r-1$有

$$\alpha_i=\alpha_{i+1}\quad\Longrightarrow\quad L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=0.$$

则$L\in\Lambda^r(V)$.

(2) 设$L\in\Lambda^r(V)$. 则对任意$\sigma\in S_r$, 有

$$L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})=\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_1,\dots,\alpha_r),\quad \forall\alpha_1,\dots,\alpha_r\in V. \tag{5.5}$$

证明. 我们把证明分为以下几步.

第一步. 假设$L\in\mathrm{M}^r(V)$满足(1)的条件, 即当某两个相邻变量相同时L取值是0. 我们证明(5.5)当σ是相邻数字的对换时成立. 设$\sigma=(i,i+1)$. 对于取定的$r-2$个向量α_j, $j\in\{1,\dots,r\}\smallsetminus\{i,i+1\}$, 记

$$L'(\alpha_i,\alpha_{i+1})=L(\alpha_1,\dots,\alpha_r).$$

则(1)的条件推出

$$\begin{aligned}0 &= L'(\alpha_i+\alpha_{i+1},\alpha_i+\alpha_{i+1})\\ &= L'(\alpha_i,\alpha_i)+L'(\alpha_{i+1},\alpha_{i+1})+L'(\alpha_i,\alpha_{i+1})+L'(\alpha_{i+1},\alpha_i)\\ &= L'(\alpha_i,\alpha_{i+1})+L'(\alpha_{i+1},\alpha_i),\end{aligned}$$

即$L'(\alpha_{i+1},\alpha_i)=-L'(\alpha_i,\alpha_{i+1})$. 由命题5.3(2), $\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$. 因此(5.5)对$\sigma=(i,i+1)$成立.

第二步. 假设$L\in \mathrm{M}^r(V)$满足(1)的条件. 我们证明(5.5)对于一般的$\sigma\in S_n$也成立. 由命题5.1, σ可以表示为相邻数字的对换的乘积$\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_k$. 对这些对换应用第一步的结果, 得到

$$\begin{aligned}L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(r)}) &= L(\alpha_{\sigma_1\cdots\sigma_k(1)},\ldots,\alpha_{\sigma_1\cdots\sigma_k(r)})\\ &= -L(\alpha_{\sigma_2\cdots\sigma_k(1)},\ldots,\alpha_{\sigma_2\cdots\sigma_k(r)})\\ &= \cdots\cdots\\ &= (-1)^k L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r).\end{aligned}$$

由命题5.3(2), $\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^k$. 因此(5.5)对一般的$\sigma\in S_n$也成立. 注意到如果$L\in\Lambda^r(V)$, 则(1)的条件成立. 因此我们已经完成了(2)的证明. □

第三步. 最后我们证明(1). 假设$L\in\mathrm{M}^r(V)$满足(1)的条件, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in V$. 我们需要证明: 对任意不同的$s,t\in\{1,\ldots,r\}$, 如果$\alpha_s=\alpha_t$, 则$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=0$. 不妨设$s<t$. 如果$s+1=t$, 则(1)的条件已经保证$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=0$. 假设$s+1<t$. 对于对换$\sigma=(s+1,t)$应用第二步的结果, 得到$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=-L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(r)})$. 另一方面, 在排列$(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$中, 数字$s$与$t$相邻. 所以(1)的条件推出$L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(r)})=0$. 因此$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=0$. 这就完成了证明. □

现在设V是有限维的, $\dim V=n\geq 1$. 我们考察V上的n重交错线性函数的可能形式. 设$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的基, $\{f_1,\ldots,f_n\}$是它在V^*中的对偶基. 则对任意的$L\in\mathrm{M}^n(V)$和$\beta_1,\ldots,\beta_n\in V$, 由于$\beta_i=\sum_{j=1}^n f_j(\beta_i)\alpha_j$, 所以

$$\begin{aligned}L(\beta_1,\ldots,\beta_n) &= L\left(\sum_{j_1=1}^n f_{j_1}(\beta_1)\alpha_{j_1},\ldots,\sum_{j_n=1}^n f_{j_n}(\beta_n)\alpha_{j_n}\right)\\ &= \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_n\leq n} f_{j_1}(\beta_1)\cdots f_{j_n}(\beta_n)L(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})\\ &= \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_n\leq n} L(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})f_{j_1}\otimes\cdots\otimes f_{j_n}(\beta_1,\ldots,\beta_n),\end{aligned}$$

即

$$L=\sum_{1\leq j_1,\ldots,j_n\leq n} L(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})f_{j_1}\otimes\cdots\otimes f_{j_n}.$$

如果L是交错的, 则只有当$j_1,\ldots,j_n$互不相同时, $L(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})$才可能非零. 此时, 存在唯一的$\sigma\in S_n$使得$j_i=\sigma(i)$. 因此, 由命题5.5(2),

$$\begin{aligned}L &= \sum_{\sigma\in S_n} L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(n)})f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}\\ &= L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

如果我们定义n重线性函数

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}, \tag{5.6}$$

即

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f_{\sigma(1)}(\beta_1) \cdots f_{\sigma(n)}(\beta_n), \tag{5.7}$$

上面的讨论说明:

引理 5.6. 设$L \in \Lambda^n(V)$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$是$V$的基, $\{f_1, \dots, f_n\}$是它的对偶基. 则

$$L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_n) f_1 \wedge \cdots \wedge f_n.$$

接下来我们证明:

引理 5.7. 设$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$是$V$的基, $\{f_1, \dots, f_n\}$是其对偶基. 则

(1) $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$是交错的.

(2) $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. 特别地, $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \neq 0$.

证明. (1) 当$n = 1$时无需证明. 假设$n \geq 2$. 设$\beta_1, \dots, \beta_n \in V$, $\beta_s = \beta_t$, 这里$1 \leq s < t \leq n$. 我们希望证明$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$. 考虑对换$\tau = (s, t)$. 由推论5.4的证明可知

$$S_n \setminus A_n = \{\sigma\tau \mid \sigma \in A_n\}.$$

从而

$$\begin{aligned}
& f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\beta_1, \dots, \beta_n) \\
= & \sum_{\sigma \in A_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}(\beta_1, \dots, \beta_n) - \sum_{\sigma \in A_n} f_{\sigma\tau(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma\tau(n)}(\beta_1, \dots, \beta_n) \\
= & \sum_{\sigma \in A_n} \left(f_{\sigma(1)}(\beta_1) \cdots f_{\sigma(n)}(\beta_n) - f_{\sigma\tau(1)}(\beta_1) \cdots f_{\sigma\tau(n)}(\beta_n) \right) \\
= & \sum_{\sigma \in A_n} \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\}} f_{\sigma(i)}(\beta_i) \right) \left(f_{\sigma(s)}(\beta_s) f_{\sigma(t)}(\beta_t) - f_{\sigma(t)}(\beta_s) f_{\sigma(s)}(\beta_t) \right) = 0.
\end{aligned}$$

因此$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$是交错的.

(2) 由(5.7)即得$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_1(\alpha_1) \cdots f_n(\alpha_n) = 1$. □

由上面两个引理, 我们很容易得到:

定理 5.8. 设V是域F上的有限维线性空间, $\dim V = n \geq 1$. 则$\dim \Lambda^n(V) = 1$.

证明. 取定V的一组基和它在V^*中的对偶基$\{f_1, \dots, f_n\}$. 由引理5.7, $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$是$\Lambda^n(V)$中的非零元素. 再由引理5.6, 可知$\{f_1 \wedge \cdots \wedge f_n\}$是$\Lambda^n(V)$的基. 因此$\dim \Lambda^n(V) = 1$. □

一个n维线性空间V上的非零n重交错线性函数可以用来判断V中的n个向量是否构成一组基.

推论 5.9. 设$\dim V = n \geq 1$, $L \in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$. 则$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$是$V$的基的充分必要条件是$L(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$.

证明. 设$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$是基, $\{f_1, \dots, f_n\}$是其对偶基. 由引理5.7(2), $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. 再由定理5.8可知, 存在$c \in F \setminus \{0\}$使得$L = c f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$. 因此

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = c f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = c \neq 0.$$

反过来, 假设$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$不是基. 取$\mathrm{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$的基$\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$, $r < n$, 并扩充为V的基$\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. 设$\{g_1, \dots, g_n\}$是$\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$在$V^*$中的对偶基. 由于$g_n(\beta_1) = \cdots = g_n(\beta_r) = 0$,

所以$g_n(\alpha_1)=\cdots=g_n(\alpha_n)=0$. 由引理5.7(2)和定理5.8, 存在$c'\in F$使得$L=c'g_1\wedge\cdots\wedge g_n$. 因此
$$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=c'g_1\wedge\cdots\wedge g_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=c'\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)g_{\sigma(1)}(\alpha_1)\cdots g_{\sigma(n)}(\alpha_n)=0.$$
□

注 5.1. 当V是n维实线性空间时, V上的非零n重交错线性函数可以视为广义平行多面体的有向体积函数. 对于向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$, 考虑$V$中的**广义平行多面体**(parallelotope)
$$P=P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\left\{\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i \mid 0\le c_i\le 1\right\}.$$
给定$L\in\Lambda^n(V)\setminus\{0\}$, 我们把$|L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|$视为$P$的体积. 注意到$L$的交错性意味着, 如果$P$的某两个顶点$\alpha_s$和$\alpha_t$重合, 则$P$的体积是0. 这是对体积的定义的合理要求. 更一般地, 推论5.9表明, P的体积是0等价于$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$不是基, 即$P$落在$V$的某个真子空间中. 我们称这种情况是退化的. 当$P$非退化时, 在它上面有两个定向. 定向有几种等价的定义方式. 我们采用如下定义: P的顶点$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的两个排列$(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_n})$和$(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})$称为是等价的, 如果满足$\sigma(i_k)=j_k$的置换$\sigma\in S_n$是偶置换. 于是, 这$n$个顶点的所有排列被划分为两个等价类. 每个等价类称为P 的一个**定向**(orientation), 每个排列所在的等价类称为由这个排列决定的定向. 这时, 我们把$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$视为在$P$上选取由排列$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$决定的定向后它的有向体积. 有向体积可以取负值, 改变P的定向导致它的有向体积反号. 需要指出的是, 有向体积依赖于L的选取. 如果在V上没有附加其他结构(例如内积和V自身的定向等), 则L没有占特殊地位的选取方式. 而定理5.8说明, 有向体积的赋予方式在差一个非零因子的意义下是唯一的.

习题 5.2.

1. 集合$\{f_1\otimes f_2 \mid f_1,f_2\in V^*\}$是否为$\mathrm{M}^2(V)$的子空间? 试对$V=F^2$刻画这个集合.
2. 设$\dim V=n$. 证明$\dim \mathrm{M}^2(V)=n^2$.
3. 证明$F^{n\times 1}$上的双线性函数总是例5.5的形式.
4. 线性空间V上的双线性函数L称为**非退化的**(nondegenerate), 如果对任意$\alpha\in V\setminus\{0\}$, 存在$\beta\in V$使得$L(\alpha,\beta)\neq 0$. 证明例5.5中的双线性函数非退化的充分必要条件是矩阵A可逆.
5. 证明F^{2n}上的标准辛形式是非退化的.
6. 设V是有限维的, L是V上的非退化双线性函数. 对于子空间$W\subset V$, 定义
$$W^\perp=\{\alpha\in V \mid L(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in W\}.$$
证明$W^\perp$是V的子空间, 并且$\dim W+\dim W^\perp=\dim V$.
7. 多重线性函数$L\in\mathrm{M}^r(V)$称为是**反对称**(anti-symmetric)或**斜对称**(skew-symmetric)的, 如果交换两个变量使L的取值反号, 即(5.5)式对任意S_n中的对换σ成立. 证明: 如果$\mathrm{char}F\neq 2$, 则L反对称的充分必要条件是它是交错的.
8. 设$\mathrm{char}F=2$. 说明在F^n上存在反对称但不交错的双线性函数.
9. 设$\dim V=n$.
   (1) 证明$\dim\Lambda^2(V)=\frac{1}{2}n(n-1)$.
   (2) 设$r>n$. 证明$\Lambda^r(V)=\{0\}$.

§5.3 线性映射的行列式

设V和W是域F上的线性空间, $T \in \mathrm{L}(V, W)$, r是正整数. 与转置映射$T^t: W^* \to V^*$类似, 我们定义映射$T^{(r)}: \Lambda^r(W) \to \Lambda^r(V)$为

$$T^{(r)}(L)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = L(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_r), \quad \forall L \in \Lambda^r(W), \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V.$$

容易看出, $T^{(r)}(L)$确实属于$\Lambda^r(V)$, 并且$T^{(r)}$是线性映射. 注意$T^{(1)} = T^t$.

命题 5.10. 设$T \in \mathrm{L}(V, W)$, $U \in \mathrm{L}(W, Z)$. 则

$$T^{(r)} \circ U^{(r)} = (UT)^{(r)}.$$

证明. 对任意$L \in \Lambda^r(Z)$和$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V$, 有

$$\begin{aligned} T^{(r)}(U^{(r)}(L))(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= U^{(r)}(L)(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_r) \\ &= L(UT\alpha_1, \ldots, UT\alpha_r) = (UT)^{(r)}(L)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r), \end{aligned}$$

即

$$T^{(r)}(U^{(r)}(L)) = (UT)^{(r)}(L), \quad \forall L \in \Lambda^r(Z).$$

因此命题成立. □

下面假设V是有限维的, $\dim V = n \geq 1$. 对于$T \in \mathrm{L}(V)$, 由定理5.8, $T^{(n)}$是一维线性空间$\Lambda^n(V)$到自身的线性映射, 从而是恒同映射的常数倍(这里的"常数"指域F中的元素). 我们把这个常数定义为T的行列式.

定义 5.3. 设n是正整数, V是域F上的n维线性空间, $T \in \mathrm{L}(V)$. 满足

$$T^{(n)} = \det(T)\, \mathrm{id}_{\Lambda^n(V)} \tag{5.8}$$

的域F中的元素$\det(T)$称为T的**行列式**(determinant).

把行列式的定义式(5.8)写得具体一些, 即

$$T^{(n)}(L) = \det(T)L, \quad \forall L \in \Lambda^n(V),$$

或者

$$L(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n) = \det(T)L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \forall L \in \Lambda^n(V), \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V. \tag{5.9}$$

线性映射的行列式满足下面的基本性质.

命题 5.11. 设V是域F上的n维线性空间.

(1) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.

(2) 对任意$T, U \in \mathrm{L}(V)$, 有$\det(TU) = \det(T)\det(U)$.

(3) $T \in \mathrm{L}(V)$可逆的充分必要条件是$\det(T) \neq 0$. 此时, $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$.

(4) 设W是另一个n维线性空间, $\Phi: V \to W$是线性同构. 如果$T \in \mathrm{L}(V)$和$U \in \mathrm{L}(W)$满足$\Phi \circ T = U \circ \Phi$, 则$\det(T) = \det(U)$.

(5) 设$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$是$V$的基, $\{f_1, \ldots, f_n\}$是它在V^* 中的对偶基, $T \in \mathrm{L}(V)$. 则

$$\det(T) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n).$$

证明. (1) 容易看出$(\mathrm{id}_V)^{(n)} = \mathrm{id}_{\Lambda^n(V)}$. 因此$\det(\mathrm{id}_V) = 1$.

(2) 由命题5.10,

$$\begin{aligned}\det(TU)\mathrm{id}_{\Lambda^n(V)} &= (TU)^{(n)} = U^{(n)} \circ T^{(n)} \\ &= (\det(U)\mathrm{id}_{\Lambda^n(V)}) \circ (\det(T)\mathrm{id}_{\Lambda^n(V)}) = \det(T)\det(U)\mathrm{id}_{\Lambda^n(V)}.\end{aligned}$$

因此$\det(TU) = \det(T)\det(U)$.

(3) 假设T可逆. 由(1)和(2),

$$\det(T)\det(T^{-1}) = \det(\mathrm{id}_V) = 1.$$

因此$\det(T) \neq 0$, 并且$\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$. 反过来, 假设$\det(T) \neq 0$. 取$L \in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}$ 和V的基$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. 由推论5.9, $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. 因此(5.9)推出

$$L(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n) = \det(T)L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0.$$

再次利用推论5.9, 即知$\{T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n\}$是$V$的基. 这说明$T$把$V$的基映为基. 因此$T$可逆.

(4) 由命题5.10,

$$\begin{aligned}(\Phi T)^{(n)} &= T^{(n)} \circ \Phi^{(n)} = \det(T)\Phi^{(n)}, \\ (U\Phi)^{(n)} &= \Phi^{(n)} \circ U^{(n)} = \det(U)\Phi^{(n)}.\end{aligned}$$

上面两个等式最左边的表达式相等. 所以

$$\det(T)\Phi^{(n)} = \det(U)\Phi^{(n)}.$$

另一方面,

$$\Phi^{(n)} \circ (\Phi^{-1})^{(n)} = (\Phi^{-1} \circ \Phi)^{(n)} = (\mathrm{id}_V)^{(n)} = \mathrm{id}_{\Lambda^n(V)}.$$

特别地, $\Phi^{(n)} \neq 0$. 因此$\det(T) = \det(U)$.

(5) 由(5.9), 有

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n) = \det(T) f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

另一方面, 由引理5.7(2), $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. 所以结论成立. □

注 5.2. 当V是n维实线性空间时, 线性映射$T \in \mathrm{L}(V)$的行列式可以视为T把广义平行多面体的有向体积扩大的倍数. 设$P = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$是$V$中非退化的广义平行多面体(见注5.1). 容易看出, P在映射T下的像$T(P)$即为广义平行多面体$P(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n)$, 并且$T(P)$非退化意味着$T$可逆. 另一方面, 通过选取$L \in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}$并应用(5.9), 可以看出$T(P)$非退化等价于$\det(T) \neq 0$. 此时, 在$P$和$T(P)$上面分别选取由顶点的排列$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$和$(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n)$决定的定向, 则它们的有向体积分别是$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$和$L(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n)$. 因此, $\det(T)$即为$T(P)$ 与P的有向体积的比值. 值得注意的是, 这一比值不仅与P的定向的选择无关, 也与P自身无关, 即T把所有广义平行多面体的有向体积扩大了相同的倍数. 另外, 虽然有向体积函数L不唯一, 但T把有向体积扩大的倍数不依赖于L的选取.

行列式是1的线性映射经常有特殊的重要性. 对于有限维线性空间V, 我们记

$$\mathrm{SL}(V) = \{T \in \mathrm{L}(V) \mid \det(T) = 1\}.$$

由命题5.11(1)–(3)容易看出, $\mathrm{SL}(V)$是一般线性群$\mathrm{GL}(V)$的子群, 称为V **的特殊线性群**(special linear group of V).

习题 5.3.

1. 设$B \in F^{n\times n}$. 考虑线性映射$T_B : F^{n\times n} \to F^{n\times n}$, $T_B(A) = AB - BA$. 证明$\det(T_B) = 0$.

2. 设V是n维实线性空间, $n \geq 1$. 集合$\Lambda^n(V) \setminus \{0\}$的非空子集$\mathcal{O}$称为一个**连通分支**(connected component), 如果对任意$L \in \mathcal{O}$有$\mathcal{O} = \{cL \mid c > 0\}$.
   (1) 证明$\Lambda^n(V) \setminus \{0\}$恰好有两个连通分支. 每个连通分支称为$V$的一个**定向**(orientation).
   (2) 假设取定了V的一个定向$\mathcal{O}^+$, 并记V的另一个定向为$\mathcal{O}^-$. 设$T \in \mathrm{L}(V)$可逆. 如果$T^{(n)}(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^+$, 则称$T$是**保定向的**(orientation-preserving); 如果$T^{(n)}(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^-$, 则称$T$是**反定向的**(orientation-reversing). 证明T保定向的充分必要条件是$\det(T) > 0$, T反定向的充分必要条件是$\det(T) < 0$.

§5.4 方阵的行列式

现在我们利用线性映射的行列式来定义方阵的行列式. 设$A \in F^{n\times n}$. 它诱导了两个线性映射

$$L_A : F^{n\times 1} \to F^{n\times 1}, \quad L_A(X) = AX,$$
$$R_A : F^n \to F^n, \quad R_A(\alpha) = \alpha A.$$

引理 5.12. $\det(L_A) = \det(R_A)$.

证明. 设$\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$是$F^{n\times 1}$的标准基, $\{f_1, \ldots, f_n\}$是它在$(F^{n\times 1})^*$中的对偶基, A的第j个列向量为A_j. 由命题5.11(5),

$$\begin{aligned}\det(L_A) &= f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(A\epsilon_1, \ldots, A\epsilon_n)\\ &= f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(A_1, \ldots, A_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{\sigma(1)}(A_1)\cdots f_{\sigma(n)}(A_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n}.\end{aligned}$$

另一方面, 设$\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$是$F^n$的标准基, $\{g_1, \ldots, g_n\}$是其对偶基, A的第i个行向量为α_i. 类似地有

$$\begin{aligned}\det(R_A) &= g_1 \wedge \cdots \wedge g_n(\delta_1 A, \ldots, \delta_n A)\\ &= g_1 \wedge \cdots \wedge g_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) g_{\sigma(1)}(\alpha_1)\cdots g_{\sigma(n)}(\alpha_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

对于$\sigma \in S_n$, 数对的集合$\{(\sigma(1), 1), \ldots, (\sigma(n), n)\}$与$\{(1, \sigma^{-1}(1)), \ldots, (n, \sigma^{-1}(n))\}$相等. 所以

$$A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n} = A_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

另外, $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n} &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) A_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

这就证明了$\det(L_A) = \det(R_A)$. □

定义 5.4. 设$A\in F^{n\times n}$. 我们定义A的**行列式**为

$$\det(A)=\det(L_A)=\det(R_A).$$

在引理5.12的证明中, 我们已经得到了行列式的表达式.

推论 5.13. 设$A\in F^{n\times n}$. 则

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n}. \tag{5.10}$$

如果$A=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$, 我们也记$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

例 5.8. 由(5.10), 我们有

$$\det[a]=a,\qquad \begin{vmatrix}a&b\\ c&d\end{vmatrix}=ad-bc,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

下面给出方阵行列式的几个基本性质.

命题 5.14. (1) $\det(I_n)=1$.

(2) 设$A,B\in F^{n\times n}$. 则$\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

(3) 方阵A可逆的充分必要条件是$\det(A)\neq 0$. 此时, $\det(A^{-1})=\det(A)^{-1}$.

(4) 相似的方阵行列式相等.

(5) $\det(A^t)=\det(A)$.

(6) 映射$(F^{n\times 1})^n\to F$, $(A_1,\ldots,A_n)\mapsto\det[A_1,\ldots,A_n]$是$n$ 重交错线性函数.

(7) 映射$(F^n)^n\to F$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\mapsto\det\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$是$n$重交错线性函数.

证明. (1) 由命题5.11(1), 有

$$\det(I_n)=\det(L_{I_n})=\det(\mathrm{id}_{F^{n\times 1}})=1.$$

(2) 由命题5.11(2), 有

$$\det(AB)=\det(L_{AB})=\det(L_AL_B)=\det(L_A)\det(L_B)=\det(A)\det(B).$$

(3) 由命题5.11(3),

$$A\text{可逆}\iff L_A\text{可逆}\iff\det(A)=\det(L_A)\neq 0.$$

此时,

$$\det(A^{-1})=\det(L_{A^{-1}})=\det(L_A^{-1})=\det(L_A)^{-1}=\det(A)^{-1}.$$

(4) 设$A,B\in F^{n\times n}$相似, 即存在可逆矩阵$P\in F^{n\times n}$使得$A=PBP^{-1}$. 则由(3)和(4),

$$\det(A)=\det(PBP^{-1})=\det(P)\det(B)\det(P)^{-1}=\det(B).$$

(5) 考虑线性同构$\Phi: F^{n\times 1}\to F^n$, $\Phi(X)=X^t$. 则对$X\in F^{n\times 1}$有

$$\Phi(L_A(X))=\Phi(AX)=(AX)^t=X^tA^t=R_{A^t}(X^t)=R_{A^t}(\Phi(X)).$$

即$\Phi\circ L_A=R_{A^t}\circ\Phi$. 由命题5.11(4), $\det(L_A)=\det(R_{A^t})$. 因此$\det(A)=\det(A^t)$.

(6)+(7) 在引理5.12的证明中, 我们已经得到

$$\det[A_1,\dots,A_n]=f_1\wedge\cdots\wedge f_n(A_1,\dots,A_n),$$

$$\det\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=g_1\wedge\cdots\wedge g_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

因此(6)和(7)中的映射是n重交错线性函数. □

与线性映射的情况类似, 行列式是1的方阵也是很重要的. 命题5.14(1)–(3)表明, 集合

$$\mathrm{SL}_n(F)=\{A\in F^{n\times n}\mid \det(A)=1\}$$

是$\mathrm{GL}_n(F)$的子群, 称为F**上的**n**次特殊线性群**(special linear group of degree n over F).

命题5.14的(6)和(7)提供了计算行列式的有效工具:

推论 5.15. (1) 若方阵有零行或零列, 则行列式为0.

(2) 若方阵有两行(或两列)相同或成比例, 则行列式为0.

(3) 互换两行或两列, 方阵的行列式反号.

(4) 把某行(或列)的倍数加到另一行(或列)上, 方阵的行列式不变.

(5) 某行(或列)乘以某个常数, 导致方阵的行列式也乘以相同的常数.

证明. 这些都是命题5.14(6)和(7)的明显推论. 例如, 对于(4)中列的情况, 可以验证如下:

$$\begin{aligned}&\det[A_1,\dots,A_s,\dots,cA_s+A_t,\dots,A_n]\\=&\ c\det[A_1,\dots,A_s,\dots,A_s,\dots,A_n]+\det[A_1,\dots,A_s,\dots,A_t,\dots,A_n]\\=&\ \det[A_1,\dots,A_n].\end{aligned}$$

□

推论5.15(3)–(5)给出了方阵在初等行(列)变换下, 行列式的改变方式. 利用初等行(列)变换, 我们总是可以把方阵化为上三角或下三角的形式. 这里矩阵$A\in F^{n\times n}$称为**上三角的**(upper triangular), 如果当$i>j$时有$A_{ij}=0$; 矩阵A称为**下三角的**(lower triangular), 如果当$i<j$时有$A_{ij}=0$. 对于这两种方阵, 我们有:

命题 5.16. 上三角或下三角矩阵的行列式等于所有对角元的乘积. 特别地, 对角矩阵的行列式等于所有对角元的乘积.

证明. 设A是上三角的, 即当$i>j$时有$A_{ij}=0$. 此时, 在表达式

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}$$

中, 如果$A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}\neq 0$, 则对所有$1\le i\le n$有$i\le\sigma(i)$. 这推出$\sigma=\mathrm{id}$, 即$\sigma(i)=i$. 所以$\det(A)=A_{11}\cdots A_{nn}$. 下三角的情况可以类似证明. □

例 5.9. 丘老师书上册32页例1; 教材158页例6.

作为命题5.16的推广, 我们证明下面的结果.

命题 5.17. 设方阵A是分块上三角矩阵, 即

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2,k-1} & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{k-1,k-1} & A_{k-1,k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{kk} \end{bmatrix},$$

其中A_{ii}为方阵, $A_{ij}\,(i<j)$和0为合适尺寸的矩阵. 则

$$\det(A)=\det(A_{11})\cdots\det(A_{kk}).$$

特别地, 如果$B\in F^{r\times r}$, $C\in F^{r\times s}$, $D\in F^{s\times s}$, 则

$$\det\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D\end{bmatrix}=\det(B)\det(D). \tag{5.11}$$

对于分块下三角矩阵和分块对角矩阵, 类似的结论也成立.

证明. 我们先证明(5.11)式. 设矩阵$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D\end{bmatrix}$的$(i,j)$元为$a_{ij}$, $i,j\in\{1,\ldots,r+s\}$. 则

$$\det\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D\end{bmatrix}=\sum_{\sigma\in S_{r+s}}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{r+s,\sigma(r+s)}.$$

注意到当$i\ge r+1$并且$\sigma(i)\le r$时, 有$a_{i\sigma(i)}=0$. 所以, 如果$\sigma\in S_{r+s}$使得$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{r+s,\sigma(r+s)}\ne 0$, 则当$i\ge r+1$时有$\sigma(i)\ge r+1$. 这推出当$i\le r$时有$\sigma(i)\le r$. 因此, 存在$\sigma_1\in S_r$和$\sigma_2\in S_s$使得

$$\sigma(i)=\begin{cases}\sigma_1(i), & 1\le i\le r,\\ r+\sigma_2(i-r), & r+1\le i\le r+s.\end{cases}$$

此时有$\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)$. 从而

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D\end{bmatrix}&=\sum_{\sigma_1\in S_r,\sigma_2\in S_s}\operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)a_{1\sigma_1(1)}\cdots a_{r\sigma_1(r)}a_{r+1,r+\sigma_2(1)}\cdots a_{r+s,r+\sigma_2(s)}\\ &=\left(\sum_{\sigma_1\in S_r}\operatorname{sgn}(\sigma_1)a_{1\sigma_1(1)}\cdots a_{r\sigma_1(r)}\right)\left(\sum_{\sigma_2\in S_s}\operatorname{sgn}(\sigma_2)a_{r+1,r+\sigma_2(1)}\cdots a_{r+s,r+\sigma_2(s)}\right)\\ &=\det(B)\det(D).\end{aligned}$$

这就证明了(5.11).

接下来用归纳法证明分块上三角矩阵的结论. 当$k=2$时结论已经证明. 假设$k\ge 3$, 并且结论对$k-1$成立. 则

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,k-1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2,k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{k-1,k-1}\end{bmatrix}\det(A_{kk})=\det(A_{11})\cdots\det(A_{kk}).$$

这就完成了证明. 分块下三角矩阵情况的证明类似. □

我们讨论了线性映射和矩阵的行列式. 线性映射自身的行列式与它关于有序基的矩阵的行列式有什么关系? 下面命题的前一部分回答了这一问题. 它也可以用来把线性映射行列式的计算转化为方阵行列式的计算.

命题 5.18. 设V是$n \geq 1$维线性空间, $T \in \mathrm{L}(V)$.

(1) 设$\mathcal{B}$是V的有序基, $[T]_{\mathcal{B}}$是T关于该有序基的矩阵. 则$\det([T]_{\mathcal{B}}) = \det(T)$.

(2) 设$T^t \in \mathrm{L}(V^*)$是T的转置映射. 则$\det(T^t) = \det(T)$.

证明. (1) 回忆坐标映射$\Gamma : V \to F^{n\times 1}$, $\alpha \mapsto [\alpha]_{\mathcal{B}}$是线性同构, 并且$\Gamma \circ T = L_{[T]_{\mathcal{B}}} \circ \Gamma$. 由命题5.11(4), 即得

$$\det(T) = \det(L_{[T]_{\mathcal{B}}}) = \det([T]_{\mathcal{B}}).$$

(2) 设$\mathcal{B}$是V的有序基, $\mathcal{B}^*$是$\mathcal{B}$在V^*中的对偶基, $[T]_{\mathcal{B}}$和$[T^t]_{\mathcal{B}^*}$分别是T和T^t关于相应有序基的矩阵. 我们知道, $[T^t]_{\mathcal{B}^*} = [T]_{\mathcal{B}}^t$. 由(1)和命题5.14(5), 即得

$$\det(T^t) = \det([T^t]_{\mathcal{B}^*}) = \det([T]_{\mathcal{B}}) = \det(T).$$

这就完成了证明. □

习题 5.4.

1. 教材162–163页习题3,4,5.
2. 丘老师书上册26页1(2); 35页1(3), 2(1), 3(1), 4(2).
3. 利用方阵行列式的表达式(5.10)验证命题5.14中的(1),(5),(6),(7).
4. 证明$\mathrm{sgn}(\sigma) = \det R(\sigma)$, 这里$R(\sigma)$是习题5.1.3中定义的矩阵.
5. 利用命题5.11(5)证明命题5.18(2).
6. 设K是域F的子域, 满足F作为K上的线性空间是有限维的. 对于$x \in F$, K-线性映射
$$T_x : F \to F, \quad y \mapsto xy$$
的行列式称为x的(从F到K的)**范数**(norm), 记为$\mathrm{N}_{F/K}(x) = \det(T_x)$. 对于下面的情况, 给出范数的表达式.
   (1) $K = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{C}$.
   (2) $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   (3) $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) := \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.
7. 设V是有限维复线性空间, $T \in \mathrm{L}(V)$. 我们把对V执行"忘掉复结构"的操作后得到的实线性空间记为$V_{\mathbb{R}}$, 从而T可以视为实线性映射$T_{\mathbb{R}} \in \mathrm{L}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$. 证明$\det(T_{\mathbb{R}}) = |\det(T)|^2$. (提示: 若$T$关于$V$的某个基的矩阵为$A$, 则$T_{\mathbb{R}}$关于$V_{\mathbb{R}}$的某个基的矩阵为$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{bmatrix}$. 设$P = \begin{bmatrix} I & iI \\ iI & I \end{bmatrix}$. 则$P \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} A & \\ & \overline{A} \end{bmatrix}$.)
8. 设K和F如习题6, V是F上的有限维线性空间, $T \in \mathrm{L}(V)$. 把V视为K上的线性空间, 记为V_K. 从而T可以视为K-线性映射$T_K \in \mathrm{L}(V_K, V_K)$. 证明$\det(T_K) = \mathrm{N}_{F/K}(\det(T))$. 特别地, 如果$F$是$L$的子域, 则$\mathrm{N}_{L/K} = \mathrm{N}_{F/K} \circ \mathrm{N}_{L/F}$. (注: 此题暂时知道结论即可. 以后将利用有理标准形来证明. 更一般的结果见Bourbaki, Algebra I, p. 546, Prop. 6.)
9. 设$m < n$, $A \in F^{n\times m}$, $B \in F^{m\times n}$. 证明$\det(AB) = 0$.

§5.5 行列式按行或列展开

这一节考察的性质可以用来更加有效地计算行列式, 并且具有重要的理论意义.

设$A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$, $n \geq 2$. 对于正整数$k < n$和指标集$I, J \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = |J| = k$, 记$A_{I,J} \in F^{k\times k}$为由$A$的矩阵元$\{a_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ 构成的矩阵. 我们同时考虑矩阵A_{I^c,J^c}, 这里$I^c = \{1, \dots, n\} \setminus I$. 由矩阵$A$得到$A_{I,J}$和$A_{I^c,J^c}$时, 行和列的排列顺序不变. 也就是说, 如果$\sigma_I \in S_n$是由(5.1)定义的置换, 则$A_{I,J}$和$A_{I^c,J^c}$的矩阵元分别为

$$(A_{I,J})_{rs} = a_{\sigma_I(r),\sigma_J(s)}, \qquad r, s \in \{1, \dots, k\},$$

$$(A_{I^c,J^c})_{rs} = a_{\sigma_I(k+r),\sigma_J(k+s)}, \qquad r, s \in \{1, \dots, n-k\}.$$

关于A的行列式, 我们有下面的Laplace展开定理.

定理 5.19(Laplace). 设n, k是正整数, $k < n$, $A \in F^{n\times n}$. 对于$I \subset \{1, \dots, n\}$, 记$\Sigma_I = \sum_{i\in I} i$.

(1) (行列式按k行展开) 取定$I_0 \subset \{1, \dots, n\}$, $|I_0| = k$. 则

$$\det(A) = \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ |J|=k}} (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J} \det(A_{I_0,J}) \det(A_{I_0^c,J^c}).$$

(2) (行列式按k列展开) 取定$J_0 \subset \{1, \dots, n\}$, $|J_0| = k$. 则

$$\det(A) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ |I|=k}} (-1)^{\Sigma_I+\Sigma_{J_0}} \det(A_{I,J_0}) \det(A_{I^c,J_0^c}).$$

行列式$\det(A_{I,J})$称为A的行列式的**子式**(minor), 行列式$\det(A_{I^c,J^c})$称为子式$\det(A_{I,J})$的**余子式**(complementary minor), 定理中的因子

$$(-1)^{\Sigma_I+\Sigma_J} \det(A_{I^c,J^c})$$

称为子式$\det(A_{I,J})$的**余因子**或**代数余子式**(cofactor). 在这样的词汇下, 定理5.19可以叙述为: A的行列式等于固定行(或列)指标集的所有子式与相应的余因子的乘积之和.

在证明定理前, 我们先来考察它的特殊情况.

例 5.10. 设$B \in F^{k\times k}$, $C \in F^{k\times(n-k)}$, $D \in F^{(n-k)\times(n-k)}$, $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$. 我们把$A$的行列式按前$k$列展开, 即对$J_0 = \{1, \dots, k\}$应用定理5.19(2). 对于$I \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = k$, 如果$I \neq J_0$, 则矩阵A_{I,J_0}总有零行, 从而行列式为0. 另一方面, 我们有$A_{J_0,J_0} = B$, $A_{J_0^c,J_0^c} = D$. 因此, 定理5.19(2)推出

$$\det(A) = (-1)^{2\Sigma_{J_0}} \det(A_{J_0,J_0}) \det(A_{J_0^c,J_0^c}) = \det(B)\det(D).$$

这样我们就重新得到了(5.11)式.

接下来我们考虑$k = 1$时的情况. 此时, 对于$i, j \in \{1, \dots, n\}$, 一阶矩阵$A_{\{i\},\{j\}}$ 的行列式即为a_{ij}. 为了简化记号, 记$M_{ij} = A_{\{i\}^c,\{j\}^c}$. 它是在$A$中去掉第$i$ 行和第j列后得到的$n-1$阶矩阵. 也就是说, 如果定义置换

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & \cdots & n-1 & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n & i \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

则M_{ij}的矩阵元为

$$(M_{ij})_{rs} = a_{\sigma_i(r),\sigma_j(s)}, \qquad r, s \in \{1, \dots, n-1\}.$$

注意这里的σ_i实际上是(5.1)中的$\sigma_{\{i\}^c}$. 这样, 定理5.19在$k = 1$时的特殊情况可以叙述如下.

定理 5.20. 设$A=[a_{ij}]\in F^{n\times n}$, $n\geq 2$, 并沿用上面的记号.

(1) (行列式按一行展开) 对任意取定的$1\leq i_0\leq n$, 有

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_0+j}a_{i_0j}\det(M_{i_0j}).$$

(2) (行列式按一列展开) 对任意取定的$1\leq j_0\leq n$, 有

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}a_{ij_0}\det(M_{ij_0}).$$

我们把对应(i,j)-元的余因子记为

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

推论 5.21. 对任意$i,j\in\{1,\ldots,n\}$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}C_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}C_{kj}=\delta_{ij}\det(A).$$

证明. 当$i=j$时, 等式即为定理5.20. 设$i\neq j$. 记B为把A的第j行替换为第i 行得到的矩阵. 由于B有两行相同, 所以$\det(B)=0$. 另一方面, 把B的行列式按第j行展开, 并注意到B的第j行的每个矩阵元与A的同位置矩阵元具有相同的余因子, 即得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}C_{jk}=\det(B)=0.$$

类似地,

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}C_{kj}=0.$$

□

以余因子C_{ij}为(i,j)-元的n阶矩阵的转置称为A的**伴随矩阵**(adjugate, adjunct 或classical adjoint), 记为adj(A), 即

$$\mathrm{adj}(A)_{ij}=C_{ji}=(-1)^{i+j}\det(M_{ji}).$$

例如,

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\quad \mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}.$$

推论5.21可以重新叙述为:

推论 5.22. 设$A\in F^{n\times n}$, $n\geq 2$. 则

$$A\,\mathrm{adj}(A)=\mathrm{adj}(A)A=\det(A)I_n.$$

特别地, 如果A可逆, 则

$$A^{-1}=\det(A)^{-1}\mathrm{adj}(A).$$

□

推论 5.23(Cramer法则). 设$n\geq 2$, $A\in F^{n\times n}$可逆, $Y\in F^{n\times 1}$. 记B_j为把A的第j列替换为Y后得到的矩阵. 则线性方程组$AX=Y$的唯一解为

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\qquad x_j=\frac{\det(B_j)}{\det(A)}.$$

证明. 我们给出两个证明.

证明一. 方程组的唯一解为

$$X = A^{-1}Y = \det(A)^{-1}\mathrm{adj}(A)Y.$$

两边取第j行, 并对B_j应用定理5.20(2), 即得

$$x_j = \det(A)^{-1}\sum_{i=1}^{n} y_i C_{ij} = \det(A)^{-1}\det(B_j).$$

证明二. 记A的第i列为A_i. 则

$$Y = [A_1, \ldots, A_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i.$$

(注意这说明x_j是Y在$F^{n\times 1}$的基$\{A_1, \ldots, A_n\}$下的第j个坐标.) 因此

$$\begin{aligned}\det(B_j) &= \det[A_1, \ldots, A_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} x_i A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \det[A_1, \ldots, A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n] \\ &= x_j \det(A).\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

例 5.11. 考虑方程组$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. 如果$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, 则唯一解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{dy_1 - by_2}{ad - bc}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ay_2 - cy_1}{ad - bc}.$$

考虑方程组$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. 如果$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, 则唯一解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

当方程组的阶数较大时, Cramer法则的重要性更多在于其理论价值. 在具体计算时, 初等行变换的方法具有更高的效率.

现在我们回到定理的证明. 我们先证明定理5.20.

定理5.20的证明. (1) 考虑S_n的n个子集

$$P_j = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i_0) = j\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

对于$\tau \in S_{n-1}$, 定义$\tilde{\tau} \in S_n$为

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n-1) & n \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

容易看出,

$$P_j = \{\sigma_j \tilde{\tau} \sigma_{i_0}^{-1} \mid \tau \in S_{n-1}\},$$

这里σ_j, σ_{i_0}的定义如(5.12). 注意到$\mathrm{sgn}(\tilde{\tau}) = \mathrm{sgn}(\tau)$, $\mathrm{sgn}(\sigma_j) = (-1)^{n-j}$. 所以

$$\mathrm{sgn}(\sigma_j \tilde{\tau} \sigma_{i_0}^{-1}) = (-1)^{i_0+j} \mathrm{sgn}(\tau).$$

因此

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \sum_{\sigma \in P_j} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{r=1}^{n-1} a_{\sigma_{i_0}(r), \sigma\sigma_{i_0}(r)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\sigma_j \tilde{\tau} \sigma_{i_0}^{-1}) \prod_{r=1}^{n-1} a_{\sigma_{i_0}(r), \sigma_j \tau(r)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau) \prod_{r=1}^{n-1} (M_{i_0 j})_{r, \tau(r)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \det(M_{i_0 j}).
\end{aligned}$$

(2) 可以类似证明, 也可以通过对A^t应用(1)来证明. □

下面我们证明定理5.19. 读者可以与定理5.20的证明做比较.

定理5.19的证明. 与定理5.20的情况类似, 我们只需对(1)给出证明. 对于$\{1, \ldots, n\}$的k元子集J, 考虑S_n的子集

$$P_J = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(I_0) = J\}.$$

则

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ |J| = k}} \sum_{\sigma \in P_J} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}. \tag{5.14}$$

对于$\tau \in S_k$和$\upsilon \in S_{n-k}$, 定义$(\tau, \upsilon) \in S_n$为

$$(\tau, \upsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(k) & k+\upsilon(1), & \cdots & k+\upsilon(n-k) \end{pmatrix}.$$

容易看出,

$$P_J = \{\sigma_J (\tau, \upsilon) \sigma_{I_0}^{-1} \mid \tau \in S_k, \upsilon \in S_{n-k}\},$$

这里σ_J, σ_{I_0}的定义如(5.1). 容易看出, $\mathrm{sgn}(\tau, \upsilon) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\upsilon)$. 结合(5.2), 即得

$$\mathrm{sgn}(\sigma_J (\tau, \upsilon) \sigma_{I_0}^{-1}) = (-1)^{\Sigma_{I_0} + \Sigma_J} \mathrm{sgn}(\tau) \mathrm{sgn}(\upsilon).$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in P_J}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)} &= \sum_{\sigma\in P_J}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{r=1}^{k}a_{\sigma_{I_0}(r),\sigma\sigma_{I_0}(r)}\prod_{s=1}^{n-k}a_{\sigma_{I_0}(k+s),\sigma\sigma_{I_0}(k+s)}\\
&= \sum_{\tau\in S_k,\upsilon\in S_{n-k}}\operatorname{sgn}(\sigma_J(\tau,\upsilon)\sigma_{I_0}^{-1})\prod_{r=1}^{k}a_{\sigma_{I_0}(r),\sigma_J(\tau,\upsilon)(r)}\prod_{s=1}^{n-k}a_{\sigma_{I_0}(k+s),\sigma_J(\tau,\upsilon)(k+s)}\\
&= (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\sum_{\tau\in S_k,\upsilon\in S_{n-k}}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\upsilon)\prod_{r=1}^{k}a_{\sigma_{I_0}(r),\sigma_J(\tau(r))}\prod_{s=1}^{n-k}a_{\sigma_{I_0}(k+s),\sigma_J(k+\upsilon(s))}\\
&= (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\sum_{\tau\in S_k,\upsilon\in S_{n-k}}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\upsilon)\prod_{r=1}^{k}(A_{I_0,J})_{r\tau(r)}\prod_{s=1}^{n-k}(A_{I_0^c,J^c})_{s\upsilon(s)}\\
&= (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\left(\sum_{\tau\in S_k}\operatorname{sgn}(\tau)\prod_{r=1}^{k}(A_{I_0,J})_{r\tau(r)}\right)\left(\sum_{\upsilon\in S_{n-k}}\operatorname{sgn}(\upsilon)\prod_{s=1}^{n-k}(A_{I_0^c,J^c})_{s\upsilon(s)}\right)\\
&= (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\det(A_{I_0,J})\det(A_{I_0^c,J^c}).
\end{aligned}$$

将此式代入(5.14), 就完成了证明. □

在下一节中, 我们将给出定理5.19的另一个证明.

例 5.12. Vandermonde行列式(丘老师书上册41页).

习题 5.5.

1. 教材162–163页习题1,2,9,12.
2. 丘老师书上册43–44页1(2,4),2,4,6; 51页4; 56页3.

§5.6 张量积和外积

在这一节中, 我们重点考察多重交错线性函数的一种交错乘积, 称为外积. 这一构造在微分几何等领域中是非常重要的. 作为准备, 我们先考虑一般多重线性函数的张量积.

定义 5.5. 设V是域F上的线性空间, r,s是正整数, $L\in \mathrm{M}^r(V)$, $M\in \mathrm{M}^s(V)$. 我们定义L与M的**张量积**(tensor product)$L\otimes M\in \mathrm{M}^{r+s}(V)$ 为

$$L\otimes M(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}) = L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)M(\alpha_{r+1},\dots,\alpha_{r+s}),\quad \alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}\in V.$$

命题 5.24. (1) 映射$\mathrm{M}^r(V)\times \mathrm{M}^s(V)\to \mathrm{M}^{r+s}(V)$, $(L,M)\mapsto L\otimes M$是双线性的.

(2) 设$L\in \mathrm{M}^r(V)$, $M\in \mathrm{M}^s(V)$, $N\in \mathrm{M}^t(V)$. 则

$$(L\otimes M)\otimes N = L\otimes(M\otimes N).$$

证明. (1) 对任意$c \in F$, $L_1, L_2 \in \mathrm{M}^r(V)$, $M \in \mathrm{M}^s(V)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s} \in V$有

$$\begin{aligned}
&(cL_1 + L_2) \otimes M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}) \\
=\ &(cL_1 + L_2)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}) \\
=\ &cL_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}) + L_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}) \\
=\ &cL_1 \otimes M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}) + L_2 \otimes M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}) \\
=\ &(cL_1 \otimes M + L_2 \otimes M)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}).
\end{aligned}$$

因此

$$(cL_1 + L_2) \otimes M = cL_1 \otimes M + L_2 \otimes M.$$

类似地, 对任意$c \in F$, $L \in \mathrm{M}^r(V)$, $M_1, M_2 \in \mathrm{M}^s(V)$有

$$L \otimes (cM_1 + M_2) = cL \otimes M_1 + L \otimes M_2.$$

(2) 对任意$\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s+t} \in V$, 我们有

$$\begin{aligned}
&(L \otimes M) \otimes N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s+t}) \\
=\ &L \otimes M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s})N(\alpha_{r+s+1}, \ldots, \alpha_{r+s+t}) \\
=\ &L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s})N(\alpha_{r+s+1}, \ldots, \alpha_{r+s+t}) \\
=\ &L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)M \otimes N(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s+t}) \\
=\ &L \otimes (M \otimes N)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s+t}).
\end{aligned}$$

因此$(L \otimes M) \otimes N = L \otimes (M \otimes N)$. □

由命题5.24(2), 对于$L_1 \in \mathrm{M}^{r_1}(V), \ldots, L_n \in \mathrm{M}^{r_n}(V)$, 可以定义它们的张量积$L_1 \otimes \cdots \otimes L_n$, 所得结果与做乘法的次序无关. 例5.4中的$r$重线性函数即为$f_1, \ldots, f_r$的张量积, 那里的记号$f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$与这里也是一致的. 注意张量积不满足乘法交换率.

下面我们在空间有限维的情况给出$\mathrm{M}^r(V)$的基和维数.

定理 5.25. 设V是有限维线性空间, $\dim V = n$, $\{f_1, \ldots, f_n\}$是V^*的基.

(1) 集合

$$\{f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r} \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n\} \tag{5.15}$$

是$\mathrm{M}^r(V)$的基. 特别地, $\dim \mathrm{M}^r(V) = n^r$.

(2) 如果$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$是$\{f_1, \ldots, f_n\}$在$V$中的对偶基, 则对任意$L \in \mathrm{M}^r(V)$, 有

$$L = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n} L(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}.$$

证明. 注意到对$\beta \in V$有$\beta = \sum_{i=1}^n f_i(\beta)\alpha_i$. 于是, 对任意$L \in \mathrm{M}^r(V)$和$\beta_1, \ldots, \beta_r \in V$有

$$\begin{aligned}
L(\beta_1, \ldots, \beta_r) &= L\left(\sum_{i_1=1}^n f_{i_1}(\beta_1)\alpha_{i_1}, \ldots, \sum_{i_r=1}^n f_{i_r}(\beta_r)\alpha_{i_r}\right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n} f_{i_1}(\beta_1) \cdots f_{i_r}(\beta_r) L(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n} L(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}(\beta_1, \ldots, \beta_r).
\end{aligned}$$

这就证明了(2), 并且集合(5.15)生成$\mathrm{M}^r(V)$. 另一方面, 如果$c_{i_1,\ldots,i_r}\in F$满足

$$\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_r\leq n} c_{i_1,\ldots,i_r} f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_r}=0,$$

则对任意$j_1,\ldots,j_r\in\{1,\ldots,n\}$, 考虑此式左边在$(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_r})$的取值, 即得$c_{j_1,\ldots,j_r}=0$. 所以集合(5.15)线性无关, 因此是$\mathrm{M}^r(V)$的基. □

接下来我们考虑多重交错线性函数的乘法. 对于$L\in\Lambda^r(V)$, $M\in\Lambda^s(V)$, 张量积$L\otimes M$一般不是交错的. 为了定义交错的乘法, 我们首先考虑一种把一般多重线性函数化为交错函数的方法. 对于$L\in\mathrm{M}^r(V)$, 定义$\mathrm{Alt}(L)\in\mathrm{M}^r(V)$为

$$\mathrm{Alt}(L)(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(r)}),\quad \alpha_1,\ldots,\alpha_r\in V. \tag{5.16}$$

与引理5.7(1)的证明类似, 不难证明$\mathrm{Alt}(L)$是交错的, 称为L的**交错化**(alternation). 事实上, (5.6)式定义的$f_1\wedge\cdots\wedge f_n$即为$f_1\otimes\cdots\otimes f_n$的交错化. 也就是说, 我们有

引理 5.26. 设$f_1,\ldots,f_n\in V^*$. 则

$$\mathrm{Alt}(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}.$$

证明. 直接验证即得

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_1\otimes\cdots\otimes f_n(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(n)})\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_1(\alpha_{\sigma(1)})\cdots f_n(\alpha_{\sigma(n)})\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}(\alpha_1)\cdots f_{\sigma(n)}(\alpha_n)\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).\end{aligned}$$

□

引理5.26启发我们尝试定义$L\in\Lambda^r(V)$与$M\in\Lambda^s(V)$的“交错乘积”为$\mathrm{Alt}(L\otimes M)$. 但是, 进一步分析以后, 我们发现$\mathrm{Alt}(L\otimes M)$的展开式中每项会重复$r!s!$次. 这是由L和M的交错性导致的. 另外, 这样定义的“交错乘积”只在差一个因子的意义下满足乘法结合律, 即对于$L\in\Lambda^r(V)$, $M\in\Lambda^s(V)$, $N\in\Lambda^t(V)$, 有

$$(s+t)!\,\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(L\otimes M)\otimes N)=(r+s)!\,\mathrm{Alt}(L\otimes\mathrm{Alt}(M\otimes N)). \tag{5.17}$$

如果域F的特征为0, 有重复项是无关紧要的. 同时, 我们可以把L与M的“交错乘积”定义为

$$\frac{1}{(r+s)!}\mathrm{Alt}(L\otimes M) \tag{5.18}$$

或

$$\frac{1}{r!s!}\mathrm{Alt}(L\otimes M), \tag{5.19}$$

从而使它满足乘法结合律. 这两种定义都是被广泛采用的, 并且各有利弊. 注意(5.19) 中除掉的因子$r!s!$恰好起到了“消掉重复项”的作用, 并且对讨论行列式来说更加适合. 但是, 如果域F的特征非零, 因子$(r+s)!$或$r!s!$在F中一般不可逆, 从而(5.18)和(5.19)没有意义. 为了克服这一困难, 我们跳过交错化的过程, 直接采用“对每个重复项只加一次”的办法来定义交错乘法.

为此, 考虑S_{r+s}的子集

$$\mathrm{Sh}(r,s)=\{\sigma\in S_{r+s}\mid\sigma(1)<\cdots<\sigma(r),\sigma(r+1)<\cdots<\sigma(r+s)\}.$$

容易看出,

$$|\mathrm{Sh}(r,s)| = \binom{r+s}{r} = \frac{(r+s)!}{r!s!}.$$

我们定义$L \wedge M \in \mathrm{M}^{r+s}(V)$为

$$L \wedge M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(r,s)} \mathrm{sgn}(\sigma) L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}), \tag{5.20}$$

这里$\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s} \in V$.

例 5.13. 设$f_1, f_2 \in V^*$. 则$f_1 \wedge f_2$与例5.6中的记号和表达式一致.

例 5.14. 设$n > k \geq 1$. 容易看出,

$$\mathrm{Sh}(k, n-k) = \{\sigma_I \mid I \subset \{1, \ldots, n\}, |I| = k\}, \tag{5.21}$$

这里$\sigma_I \in S_n$是由(5.1)定义的置换. 特别地,

$$\mathrm{Sh}(n-1, 1) = \{\sigma_i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

其中σ_i的定义如(5.12). 因此, 如果$L \in \Lambda^{n-1}(V)$, $f \in V^*$, 则

$$\begin{aligned} L \wedge f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \sum_{i=1}^n \mathrm{sgn}(\sigma_i) L(\alpha_{\sigma_i(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma_i(n-1)}) f(\alpha_{\sigma_i(n)}) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} L(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) f(\alpha_i). \end{aligned} \tag{5.22}$$

容易证明, 当$\mathrm{char}\, F = 0$时, 由(5.20)定义的$L \wedge M$就是(5.19)式, 从而是交错的. 但是, 在一般情况下, 我们需要重新证明这一事实.

引理 5.27. 对于$L \in \Lambda^r(V)$, $M \in \Lambda^s(V)$, 由(5.20)给出的多重线性函数$L \wedge M$是交错的.

证明. 由命题5.5(1), 只需证明某两个相邻变量相同时, $L \wedge M$的取值是0. 设$\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s} \in V$, $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, 这里$1 \leq i \leq r+s-1$. 我们需要证明$L \wedge M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}) = 0$. 考虑$\mathrm{Sh}(r,s)$的子集

$$P = \{\sigma \in \mathrm{Sh}(r,s) \mid i \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(r)\}, i+1 \in \{\sigma(r+1), \ldots, \sigma(r+s)\}\},$$
$$P' = \{\sigma \in \mathrm{Sh}(r,s) \mid i \in \{\sigma(r+1), \ldots, \sigma(r+s)\}, i+1 \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(r)\}\}.$$

如果$\sigma \in \mathrm{Sh}(r,s) \setminus (P \cup P')$, 则$i$和$i+1$同时落在$\{\sigma(1), \ldots, \sigma(r)\}$或$\{\sigma(r+1), \ldots, \sigma(r+s)\}$中. 此时, 由$L$和$M$的交错性有

$$L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}) = 0.$$

另一方面, 考虑对换$\tau = (i, i+1)$. 容易看出, 如果$\sigma \in P$, 则$\tau\sigma \in \mathrm{Sh}(r,s)$, 而且进一步有

$$P' = \{\tau\sigma \mid \sigma \in P\}.$$

并且由于$\alpha_i = \alpha_{i+1}$, 当$\sigma \in P$时有

$$L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) = L(\alpha_{\tau\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\tau\sigma(r)}),$$
$$M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}) = M(\alpha_{\tau\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\tau\sigma(r+s)}).$$

利用这些事实, 我们得到

$$
\begin{aligned}
& L \wedge M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}) \\
= & \sum_{\sigma \in P \cup P'} \operatorname{sgn}(\sigma) L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}) \\
= & \sum_{\sigma \in P} \operatorname{sgn}(\sigma) (L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}) - L(\alpha_{\tau\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\tau\sigma(r)}) M(\alpha_{\tau\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\tau\sigma(r+s)})) \\
= & \ 0.
\end{aligned}
$$

这就完成了证明. □

由于引理5.27, 我们可以做出下面的定义.

定义 5.6. 设$L \in \Lambda^r(V)$, $M \in \Lambda^s(V)$. 由(5.20)给出的$L \wedge M \in \Lambda^{r+s}(V)$称为$L$与$M$的**外积** (exterior product或wedge product).

我们可以利用引理5.27给出行列式的Laplace展开定理的另一个证明.

定理5.19的另一证明. 这里只证明按k行展开的部分. 按k列展开的部分可以类似证明. 对于矩阵$B = [b_{ij}] \in F^{n \times l}$ $(1 \leq l < n)$和行指标集$I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| = l$, 记$B_I \in F^{l \times l}$为由B的矩阵元$\{b_{ij} \mid i \in I, 1 \leq j \leq l\}$构成的矩阵, 即$B_I$的矩阵元为

$$
(B_I)_{rs} = b_{\sigma_I(r), s}, \quad r, s \in \{1, \ldots, l\}.
$$

我们知道, 映射$(A_1, \ldots, A_n) \mapsto \det[A_1, \ldots, A_n]$是$F^{n \times 1}$上的$n$重交错线性函数. 因此, 对于取定的行指标集$I_0 \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I_0| = k$, 映射

$$
L : (F^{n \times 1})^k \to F, \quad L(B_1, \ldots, B_k) = \det[B_1, \ldots, B_k]_{I_0}
$$

是$F^{n \times 1}$上的k重交错线性函数, 映射

$$
M : (F^{n \times 1})^{n-k} \to F, \quad M(B_1, \ldots, B_{n-k}) \mapsto \det[B_1, \ldots, B_{n-k}]_{I_0^c}
$$

是$F^{n \times 1}$上的$n-k$重交错线性函数. 由引理5.27, 外积$L \wedge M$是$F^{n \times 1}$上的n重交错线性函数. 而这样的n重交错线性函数空间的维数是1. 因此存在常数$c \in F$使得

$$
L \wedge M(A_1, \ldots, A_n) = c \det[A_1, \ldots, A_n], \quad \forall A_1, \ldots, A_n \in F^{n \times 1}. \tag{5.23}
$$

下面我们计算$L \wedge M$的表达式, 并且给出常数c. 由(5.21), 我们有

$$
\begin{aligned}
L \wedge M(A_1, \ldots, A_n) &= \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ |J| = k}} \operatorname{sgn}(\sigma_J) L(A_{\sigma_J(1)}, \ldots, A_{\sigma_J(k)}) M(A_{\sigma_J(k+1)}, \ldots, A_{\sigma_J(n)}) \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ |J| = k}} \operatorname{sgn}(\sigma_J) \det[A_{\sigma_J(1)}, \ldots, A_{\sigma_J(k)}]_{I_0} \det[A_{\sigma_J(k+1)}, \ldots, A_{\sigma_J(n)}]_{I_0^c} \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ |J| = k}} \operatorname{sgn}(\sigma_J) \det[A_1, \ldots, A_n]_{I_0, J} \det[A_1, \ldots, A_n]_{I_0^c, J^c}.
\end{aligned}
$$

将此式代入(5.23), 得到

$$
c \det(A) = \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ |J| = k}} \operatorname{sgn}(\sigma_J) \det(A_{I_0, J}) \det(A_{I_0^c, J^c}), \quad \forall A \in F^{n \times n}.
$$

在上式中取$A = I_n$, 即得$c = \operatorname{sgn}(\sigma_{I_0})$. 再利用(5.2), 就完成了证明. □

我们继续讨论交错多重线性函数的外积.

命题 5.28. (1) 映射$\Lambda^r(V)\times\Lambda^s(V)\to\Lambda^{r+s}(V)$, $(L,M)\mapsto L\wedge M$是双线性的.

(2) 设$L\in\Lambda^r(V), M\in\Lambda^s(V), N\in\Lambda^t(V)$. 则
$$(L\wedge M)\wedge N=L\wedge(M\wedge N).$$
(3) 设$L\in\Lambda^r(V), M\in\Lambda^s(V)$. 则
$$M\wedge L=(-1)^{rs}L\wedge M.$$

证明. (1) 类似于命题5.24(1)的证明. 这里从略.

(2) 我们验证$(L\wedge M)\wedge N$和$L\wedge(M\wedge N)$在$(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s+t})\in V^{r+s+t}$的取值都等于
$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s,t)}\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M(\alpha_{\sigma(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s)})N(\alpha_{\sigma(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s+t)}),\tag{5.24}$$
这里
$$\mathrm{Sh}(r,s,t)=\{\sigma\in S_{r+s+t}\mid\sigma(1)<\cdots<\sigma(r),\sigma(r+1)<\cdots<\sigma(r+s),\sigma(r+s+1)<\cdots<\sigma(r+s+t)\}.$$
首先, 对于$\tau\in\mathrm{Sh}(r,s)$, 定义$\tilde\tau\in\mathrm{Sh}(r,s,t)$为
$$\tilde\tau(i)=\begin{cases}\tau(i), & 1\le i\le r+s,\\ i, & r+s+1\le i\le r+s+t.\end{cases}$$
则$\mathrm{sgn}(\tilde\tau)=\mathrm{sgn}(\tau)$. 容易看出, 如果$\sigma\in\mathrm{Sh}(r+s,t)$, $\tau\in\mathrm{Sh}(r,s)$, 则$\sigma\tilde\tau\in\mathrm{Sh}(r,s,t)$, 并且映射$\mathrm{Sh}(r+s,t)\times\mathrm{Sh}(r,s)\to\mathrm{Sh}(r,s,t)$, $(\sigma,\tau)\mapsto\sigma\tilde\tau$可逆. 从而
$$\begin{aligned}&(L\wedge M)\wedge N(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s+t})\\
=&\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(r+s,t)}\mathrm{sgn}(\sigma)L\wedge M(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s)})N(\alpha_{\sigma(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s+t)})\\
=&\sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Sh}(r+s,t)\\ \tau\in\mathrm{Sh}(r,s)}}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)L(\alpha_{\sigma(\tau(1))},\dots,\alpha_{\sigma(\tau(r))})M(\alpha_{\sigma(\tau(r+1))},\dots,\alpha_{\sigma(\tau(r+s))})N(\alpha_{\sigma(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s+t)})\\
=&\sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Sh}(r+s,t)\\ \tau\in\mathrm{Sh}(r,s)}}\mathrm{sgn}(\sigma\tilde\tau)L(\alpha_{\sigma\tilde\tau(1)},\dots,\alpha_{\sigma\tilde\tau(r)})M(\alpha_{\sigma\tilde\tau(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma\tilde\tau(r+s)})N(\alpha_{\sigma\tilde\tau(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma\tilde\tau(r+s+t)})\end{aligned}$$
= (5.24)式.

类似地, 对$\tau\in\mathrm{Sh}(s,t)$, 定义$\hat\tau\in\mathrm{Sh}(r,s,t)$为
$$\hat\tau(i)=\begin{cases}i, & 1\le i\le r,\\ r+\tau(i-r), & r+1\le i\le r+s+t.\end{cases}$$
则$\mathrm{sgn}(\hat\tau)=\mathrm{sgn}(\tau)$, 并且$(\sigma,\tau)\mapsto\sigma\hat\tau$是从$\mathrm{Sh}(r,s+t)\times\mathrm{Sh}(s,t)$到$\mathrm{Sh}(r,s,t)$的可逆映射. 因此
$$\begin{aligned}&L\wedge(M\wedge N)(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s+t})\\
=&\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s+t)}\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M\wedge N(\alpha_{\sigma(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s+t)})\\
=&\sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s+t)\\ \tau\in\mathrm{Sh}(s,t)}}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M(\alpha_{\sigma(r+\tau(1))},\dots,\alpha_{\sigma(r+\tau(s))})N(\alpha_{\sigma(r+\tau(s+1))},\dots,\alpha_{\sigma(r+\tau(s+t))})\\
=&\sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s+t)\\ \tau\in\mathrm{Sh}(s,t)}}\mathrm{sgn}(\sigma\hat\tau)L(\alpha_{\sigma\hat\tau(1)},\dots,\alpha_{\sigma\hat\tau(r)})M(\alpha_{\sigma\hat\tau(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma\hat\tau(r+s)})N(\alpha_{\sigma\hat\tau(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma\hat\tau(r+s+t)})\end{aligned}$$
= (5.24)式.

这就完成了证明.

(3) 考虑置换

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ s+1 & \cdots & r+s & 1 & \cdots & s \end{pmatrix} \in S_{r+s}.$$

容易看出, $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^{rs}$, 并且对于$\sigma \in S_{r+s}$, $\sigma \in \mathrm{Sh}(s,r)$的充分必要条件是$\sigma\tau \in \mathrm{Sh}(r,s)$. 从而对$\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s} \in V$, 我们有

$$\begin{aligned} M \wedge L(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(s,r)} \mathrm{sgn}(\sigma) L(\alpha_{\sigma(s+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}) M(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(s)}) \\ &= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(s,r)} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) L(\alpha_{\sigma\tau(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma\tau(r)}) M(\alpha_{\sigma\tau(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma\tau(r+s)}) \\ &= (-1)^{rs} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(r,s)} \mathrm{sgn}(\sigma) L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}) \\ &= (-1)^{rs} L \wedge M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s}). \end{aligned}$$

因此$M \wedge L = (-1)^{rs} L \wedge M$. □

由外积的乘法结合律, 即命题5.28(2), 对于$L_1 \in \Lambda^{r_1}(V), \ldots, L_n \in \Lambda^{r_n}(V)$, 可以定义它们的外积$L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$, 所得结果与做外积的次序无关. 如果$L_i$都是线性函数, 它们的外积有下面的表达式.

命题 5.29. 设$f_1, \ldots, f_n \in V^*$. 则

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n = \mathrm{Alt}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}.$$

证明. 第二个等式就是引理5.26. 我们用归纳法证明第一个等式. 当$n = 1$时无需证明. 假设$n \geq 2$, 并且第一个等式对$n-1$成立. 对于$1 \leq i \leq n$, 记

$$P_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = i\}.$$

则

$$P_i = \{\sigma_i \tilde{\tau} \mid \tau \in S_{n-1}\},$$

这里σ_i由(5.12)定义, $\tilde{\tau}$由(5.13)定义. 由(5.22)式和归纳假设, 对$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$有

$$\begin{aligned} & f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sgn}(\sigma_i) \mathrm{Alt}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n-1})(\alpha_{\sigma_i(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma_i(n-1)}) f_n(\alpha_{\sigma_i(n)}) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sgn}(\sigma_i) \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau) f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n-1}(\alpha_{\sigma_i(\tau(1))}, \ldots, \alpha_{\sigma_i(\tau(n-1))}) f_n(\alpha_{\sigma_i(n)}) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\sigma_i \tilde{\tau}) f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(\alpha_{\sigma_i \tilde{\tau}(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma_i \tilde{\tau}(n)}) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in P_i} \mathrm{sgn}(\sigma) f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}) \\ = & \mathrm{Alt}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

这就完成了证明. □

命题5.29说明, 我们在(5.6)中引入的n重交错线性函数即为$f_1,\dots,f_n$的外积. 那里的记号$f_1\wedge\cdots\wedge f_n$与这里是一致的.

推论 5.30. 设$f_1,\dots,f_n\in V^*$. 则

(1) 对任意$\sigma\in S_n$有

$$f_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge f_{\sigma(n)}=\operatorname{sgn}(\sigma)f_1\wedge\cdots\wedge f_n.$$

(2) 对任意$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$有

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\det[f_i(\alpha_j)],$$

这里$[f_i(\alpha_j)]\in F^{n\times n}$是$(i,j)$-元为$f_i(\alpha_j)$的方阵.

证明. (1) 由命题5.29, 有

$$\begin{aligned}f_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge f_{\sigma(n)}&=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)f_{\sigma\tau(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma\tau(n)}\\&=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\tau)f_{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\tau(n)}\\&=\operatorname{sgn}(\sigma)f_1\wedge\cdots\wedge f_n.\end{aligned}$$

我们也可以对多重交错线性映射$(V^*)^n\mapsto\Lambda^n(V)$, $(f_1,\dots,f_n)\mapsto f_1\wedge\cdots\wedge f_n$应用命题5.5(2)的推广来证明(1).

(2) 利用方阵行列式的表达式(5.10), 即得

$$\begin{aligned}f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)&=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}(\alpha_1)\cdots f_{\sigma(n)}(\alpha_n)=\det[f_i(\alpha_j)].\end{aligned}$$

□

上面的内容可以帮助我们进一步理解Laplace展开定理的第二个证明. 设$\{f_1,\dots,f_n\}$是$F^{n\times1}$的标准基在$(F^{n\times1})^*$中的对偶基. 取定指标集$I_0\subset\{1,\dots,n\}$, $|I_0|=k$. 设

$$\begin{aligned}I_0&=\{i_1,\dots,i_k\},\quad i_1<\cdots<i_k,\\I_0^c&=\{i'_1,\dots,i'_{n-k}\},\quad i'_1<\cdots<i'_{n-k}.\end{aligned}$$

由推论5.30(1), 我们有

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n=\operatorname{sgn}(\sigma_{I_0})(f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k})\wedge(f_{i'_1}\wedge\cdots\wedge f_{i'_{n-k}}).$$

容易看出, $f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}$和$f_{i'_1}\wedge\cdots\wedge f_{i'_{n-k}}$分别是证明中的函数$L$和$M$, 而上式就是(5.23)式. 也就是说, 我们把$f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}$与$f_{i'_1}\wedge\cdots\wedge f_{i'_{n-k}}$的外积按定义做展开, 就得到了Laplace展开定理.

接下来我们给出$\Lambda^r(V)$的基和维数.

定理 5.31. 设V是有限维线性空间, $\dim V=n$, $\{f_1,\dots,f_n\}$是V^*的基.

(1) 如果$1\le r\le n$, 则

$$\{f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_r}\mid 1\le i_1<\cdots<i_r\le n\}\tag{5.25}$$

是$\Lambda^r(V)$的基. 特别地, $\dim\Lambda^r(V)=\binom{n}{r}$.

(2) 如果$r>n$, 则$\Lambda^r(V)=\{0\}$.

证明. 设$L \in \Lambda^r(V)$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$是$\{f_1, \ldots, f_n\}$在$V$中的对偶基. 由定理5.25(2),

$$L = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_r \le n} L(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}.$$

如果$r > n$, 则集合$\{1, \ldots, n\}$中的数字$i_1, \ldots, i_r$总会有两个相同, 从而$L(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}) = 0$. 因此$L = 0$. 这就证明了(2). 假设$1 \le r \le n$. 则

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\} \\ \text{并且互不相同}}} L(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \sum_{\sigma \in S_r} L(\alpha_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, \alpha_{i_{\sigma(r)}}) f_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes f_{i_{\sigma(r)}} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} L(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}) \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes f_{i_{\sigma(r)}} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} L(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_r}. \end{aligned}$$

因此集合(5.25)生成$\Lambda^r(V)$. 另一方面, 集合(5.15)线性无关推出集合(5.25)也线性无关. 这就证明了(5.25)是$\Lambda^r(V)$的基. □

最后, 我们证明一个线性函数外积的重要性质, 即外积是否为零可以用来判断这些线性函数是否线性相关.

定理 5.32. 设$f_1, \ldots, f_n \in V^*$. 则$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \neq 0$的充分必要条件是$\{f_1, \ldots, f_n\}$线性无关.

证明. "$\Longrightarrow$". 假设$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \neq 0$. 则存在$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$使$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. 由推论5.30(2), 这推出矩阵$[f_i(\alpha_j)]$ 可逆. 如果$c_1, \ldots, c_n \in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0$, 则

$$(c_1, \ldots, c_n)[f_i(\alpha_j)] = \Big(\sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_1), \ldots, \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_n)\Big) = 0.$$

所以$(c_1, \ldots, c_n) = 0$. 因此$\{f_1, \ldots, f_n\}$线性无关.

"$\Longleftarrow$". 假设$\{f_1, \ldots, f_n\}$线性无关. 我们先证明线性映射

$$T : V \to F^n, \quad T(\alpha) = (f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))$$

是满射. 为此, 只需证明$\mathrm{Im}(T)$在$(F^n)^*$中的零化子空间$\mathrm{Im}(T)^0$为零子空间. 设$g \in \mathrm{Im}(T)^0$. 由于g是F^n上的线性函数, 所以存在$c_1, \ldots, c_n \in F$使得

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in F^n.$$

而$g \in \mathrm{Im}(T)^0$说明$g \circ T = 0$, 即对任意$\alpha \in V$有

$$g(T(\alpha)) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha) = 0,$$

也就是说$\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0$. 由于$\{f_1, \ldots, f_n\}$线性无关, 这推出$c_1 = \cdots = c_n = 0$, 即$g = 0$. 这就证明了$\mathrm{Im}(T)^0 = 0$. 因此T是满射. 现在, 考虑F^n的标准基$\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. 由于$T$是满射, 存在$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ 使得$T(\alpha_j) = \epsilon_j$, 即$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. 从而矩阵$[f_i(\alpha_j)]$为单位矩阵. 由推论5.30(2), 我们得到$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. 因此$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \neq 0$. □

下面的推论是显然的.

推论 5.33. 设$\dim V = n$, $f_1, \ldots, f_n \in V^*$. 则$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \neq 0$的充分必要条件是$\{f_1, \ldots, f_n\}$是$V^*$的基.

我们利用推论5.9给出推论5.33的另一个证明.

证明. 注意到$\dim \Lambda^n(V) = 1$. 取定同构映射$\phi : \Lambda^n(V) \to F$. 则映射

$$L : (V^*)^n \to F, \quad L(f_1, \ldots, f_n) = \phi(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$$

是V^*上的n重线性函数. 由于对任意$f \in V^*$有$f \wedge f = 0$, 所以L在相邻变量相同时取值是零. 由命题5.5(1), L是交错的. 另一方面, 由引理5.7(2), L不恒等于零. 总之, 我们有$L \in \Lambda^n(V^{**}) \setminus \{0\}$. 由推论5.9, 即得

$$\{f_1, \ldots, f_n\}\text{是}V^*\text{的基} \quad \Longleftrightarrow \quad L(f_1, \ldots, f_n) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \neq 0.$$

这就完成了证明. □

习题 5.6.

1. 验证(5.16)中定义的$\mathrm{Alt}(L)$是交错的.
2. 不用上题结果, 直接验证(5.16)中定义的$\mathrm{Alt}(L)$是反对称的.
3. 不用命题5.28(2)直接验证(5.17)式.
4. 假设$\mathrm{char}\, F = 0$. 利用(5.17)验证(5.18)和(5.19)中定义的“交错乘积”都满足乘法结合率.
5. 假设$\mathrm{char}\, F = 0$. 验证(5.20)中定义的$L \wedge M$与(5.19)式一致.
6. 设r是奇数, $L \in \Lambda^r(V)$. 证明$L \wedge L = 0$.
7. 设$f_1, \ldots, f_r \in V^*$线性无关. 证明对$f \in V^*$, $f \in \mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_r\}$的充分必要条件是$f \wedge f_1 \wedge \cdots \wedge f_r = 0$.
8. 设$g_1, \ldots, g_r \in W^*$, $T \in \mathrm{L}(V, W)$. 证明
$$T^{(r)}(g_1 \wedge \cdots \wedge g_r) = T^t g_1 \wedge \cdots \wedge T^t g_r.$$
9. 设$\dim V = n$, $f_1, \ldots, f_n \in V^*$, $T \in \mathrm{L}(V)$. 证明
$$T^t f_1 \wedge \cdots \wedge T^t f_n = \det(T) f_1 \wedge \cdots \wedge f_n.$$