《测度论》期终考试试卷解答

2015 年 6 月 30 日下午，闭卷，每题 10 分

整体情况： 75 人参加考试，最高分 92 ，最低分 17 ，平均分 51.14 ，每道题目得满分 / 零分的人数依次是 57/1, 57/1, 46/7, 47/3, 7/38, 5/53, 29/19, 16/3, 2/41, 1/21.

1. 证： (1) $\Longrightarrow$ (2), 因为 $\nu << \mu$, , 故 $d\nu/d\mu$ 存在，记为 f. 又因为 ν 为有限符号测度， $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. 由积分的绝对连续性 (课本定理 3.2.3) 可知，对于 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\mu(A) < \delta$ 时， $|\nu(A)| \le \int_A |f| d\mu < \epsilon$.

(2) $\Longrightarrow$ (1), 如果 $\mu(A) = 0$, 则对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, $\mu(A) < \delta$, 所以 $\nu(A) < \epsilon$, 由 ϵ 的任意性， $\nu(A)$=0.

注. 这要比 6 月 19 日课堂上讲的方法更简单. 个别同学假设 f 有界，既不合理又不必要.

2. 根据 Hahn 分解 (定理 4.2.3 及等式 (4.2.6)), $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$. 对任何 $A \in \mathcal{F}$,

$$\mu(A) = \mu(A \cap \Omega^+) + \mu(A \cap \Omega^-) = \mu^+(A) - \mu^-(A),$$

其中 $\mu^+(A) = \mu(A \cap \Omega^+) \ge 0, \quad \mu^-(A) = -\mu(A \cap \Omega^-) \ge 0$. 因此

$$\mu^+(\Omega) = \mu(\Omega^+) \ge \mu(A \cap \Omega^+) \ge \mu(A) \ge \mu(A \cap \Omega^-) \ge \mu(\Omega^-) = -\mu^-(\Omega).$$

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A)| = \max\{\mu^+(\Omega), \mu^-(\Omega)\}, \qquad \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) \le 2 \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A)|.$$

如果 $\mu(\Omega) = \mu^+(\Omega) - \mu^-(\Omega) = 0$, 则 $\mu^+(\Omega) = \mu^-(\Omega) = \sup_{A\in\mathcal{F}} |\mu(A)|$, 上述不等式中等号成立.

3. 证. 因为 $\nu(A) = \int_A f d\mu, \theta(A) = \int_A g d\mu$. 所以 $(\theta - \nu)(A) = \int_A (g - f) d\mu$. 进一步，根据已知结论 (课本第 105 页第 3 行), $(\theta - \nu)^+(A) = \int_A (g - f)^+ d\mu$. 同理 $(\nu - \theta)^+(A) = \int_A (f - g)^+ d\mu$. 因此

$$\frac{d(\nu \vee \theta)}{d\mu} = \frac{d(\nu + (\theta - \nu)^+)}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu} + \frac{d(\theta - \nu)^+}{d\mu} \overset{(a)}{=} f + (g - f)^+ = f \vee g;$$

$$\frac{d(\nu \wedge \theta)}{d\mu} = \frac{d(\nu - (\nu - \theta)^+)}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu} - \frac{d(\nu - \theta)^+}{d\mu} = f - (f - g)^+ = f \wedge g.$$

注：等式 (a) 也可根据证明所需猜到. 如果不在使用这一等式前引述已有结论， 容易使人怀疑你需要什么就写什么. 这在研究中倒要积极作用，但在严谨的考试中还是要表现出你所掌握的依据.

4. 因为 X 与 Y 独立同分布，所以 (X,Y) 与 (Y,X) 同分布．对于任意可测函数 f,

$$E[Xf(X+Y)]=E[Yf(Y+X)]=E[Yf(X+Y)].$$

任何 $B\in\sigma(X+Y)$ 可以表示为 $X+Y\in A$, 其中 A 为 Borel 集．即,

$$\int_B XdP=\int X1_A(X+Y)dP=\int Y1_A(X+Y)dP=\int_B YdP.$$

所以 $E(X|X+Y)=E(Y|X+Y)\quad a.s.$ 进而

$$E(X|X+Y)=\frac{1}{2}[E(X|X+Y)+E(Y|X+Y)]=\frac{1}{2}E(X+Y|X+Y)=\frac{X+Y}{2}\quad a.s.$$

5. 证：对任意实数 c, 事件 $A=\{X\geq c\}\in\sigma(X)$, 事件 $B=\{Y\geq c\}\in\sigma(Y)$. 由 $X=E(Y|X)$ 可得

$$\int_A XdP=\int_A E(Y|X)dP=\int_A YdP$$

$$\int_{AB}(X-Y)dP=\int_{A\cap B^c}(Y-X)dP\leq 0.$$

同理由 $Y=E(X|Y)$ 可得 $\int_{AB}(X-Y)dP=\int_{B\cap A^c}(Y-X)dP\geq 0$. 结合上式得

$$\int_{A\cap B^c}(Y-X)dP=0.$$

由此推出 $P(X\geq c>Y)=P(A\cap B^c)=0$.

$$P(X>Y)=P(\cup_{r\in Q}\{X\geq r>Y\})\leq\sum_{r\in Q}P(X\geq r>Y)=0.$$

其中 Q 是有理数全体. 同理, 由 X 与 Y 的对称性可得 $P(Y>X)=0$, 合并得 $P(X\neq Y)=0$, 即 $X=Y$ a.s.

注 1: 有些同学在 $EX^2<\infty$, $EY^2<\infty$ 的条件下证明此题，可得 2 分.

注 2. 有些同学在证明中注意到,

$$\forall A\in\sigma(X),\int_A XdP=\int_A YdP,\qquad\forall B\in\sigma(Y),\int_B XdP=\int_B YdP.$$

凡有此观察者可得 2 分；有些同学试图证明 $\mathcal{H}=\{A,\quad\int_A XdP=\int_A YdP\}$ 是 σ- 域，可得 5 分.

6. 证；记 $\xi=E(X|\mathcal{G})$, $\eta=E(Y|\mathcal{H})$. 问题转化为对任何 $A\in\mathcal{G}\vee\mathcal{H}$ 验证

$$\int_A XYdP=\int_A\xi\eta dP.$$

取 $\mathcal{L}=\{A,\int_A XYdP=\int_A\xi\eta dP\}$. $\Gamma=\{A\cap B,\quad A\in\mathcal{G},B\in\mathcal{H}\}$. 下面验证 (1) $\mathcal{L}$ 是 λ- 类， (2)Γ 是 π- 类， (3) $\Gamma\subset\mathcal{L}$. 则根据 π-λ 引理， $\mathcal{L}\supset\sigma(\Gamma)=\mathcal{G}\vee\mathcal{H}$.

(1) 由独立性 $\int_\Omega XYdP = E(XY) = EXEY = E\xi E\eta = E(\xi\eta) = \int_\Omega \xi\eta dP$. 所以 $\Omega \in \mathcal{L}$. (这里需要 $E|XY| = E|X|E|Y| < \infty$. 题目中没有明确注明 $E|X| < \infty, E|Y| < \infty$，但这是能够定义条件期望 $E(X|\mathcal{G})$,$E(Y|\mathcal{H})$ 的前提.)

其次， 如果 $A, B \in \mathcal{L}$, $A \supset B$, 则

$$\int_{A\setminus B} XYdP = \int_A XYdP - \int_B XYdP = \int_A \xi\eta dP - \int_B \xi\eta dP = \int_{A\setminus B} \xi\eta dP.$$

由此可知 $A \setminus B \in \mathcal{L}$.

再次，如果 $A_n \in \mathcal{L}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A = \cup_n A_n$ 则

$$\int_A XYdP = \lim_n \int_{A_n} XYdP = \lim_n \int_{A_n} \xi\eta dP = \int_A \xi\eta dP.$$

这里我们用了控制收敛定理，以 $|XY|$ 为控制函数. 综上所述， $\mathcal{L}$ 是 λ- 类.

(2) 如果 $A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2 \in \Gamma$, 其中 $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$, $B_1, B_2 \in \mathcal{H}$, 则 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{G}$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{H}$. 故 $(A_1 \cap B_1) \cap (A_2 \cap B_2) = (A_1 \cap A_2) \cap (B_1 \cap B_2) \in \Gamma$. 即 Γ 是 π- 类.

(3) 设 $A \cap B \in \Gamma$, $A \in \mathcal{G}$， $B \in \mathcal{H}$, 则

$$\int_{AB} XYdP = E(X1_A Y1_B) \overset{(2)}{=} (EX1_A)(EY1_B) = \int_A XdP \int_B YdP$$

$$\overset{(4)}{=} \int_A \xi dP \int_B \eta dP = (E\xi 1_A)(E\eta 1_B) \overset{(6)}{=} E(\xi 1_A \eta 1_B) = \int_{AB} \xi\eta dP.$$

其中第 2 个等号利用 $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$ 与 $\sigma(Y) \vee \mathcal{H}$ 的相互独立性, 第 4 个等式是条件期望的定义, 第 6 个等号利用 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{H}$ 的相互独立性. 因此 $\Gamma \subset \mathcal{L}$.

注. 我们在上面证明中增加了条件： $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$ 与 $\sigma(Y) \vee \mathcal{H}$ 相互独立. 已有同学给出了反例说明考题条件 (X 与 Y 及 $\mathcal{H}$ 独立， Y 与 X 及 $\mathcal{G}$ 独立， $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{H}$ 独立) 不足以推出证明中所需要的 $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$ 与 $\sigma(Y) \vee \mathcal{H}$ 的相互独立性.

7. 证. 先证 $\sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i)) \subset \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$. 对任意 $i \in I$, $\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i) \subset \pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i) \subset \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$. 所以 $\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i) \subset \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$. 进而 $\sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i)) \subset \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$. (至此 5 分).

再证 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i \subset \sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i))$. 根据定义 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{Q})$, 其中

$$\mathcal{Q} = \cup_{S\in\mathcal{D}}\{\pi_S^{-1}(\prod_{t\in S} A_t), \quad A_t \in \mathcal{F}_t, t \in S\}$$

而 $\mathcal{D}$ 是 I 的所有有限子集全体. 为此，对任意 $S \in \mathcal{D}$,

$$\pi_S^{-1}(\prod_{t\in S} A_t) \in \pi_S^{-1}(\prod_{t\in S}\mathcal{F}_t) = \pi_S^{-1}(\prod_{t\in S}\sigma(\mathcal{C}_t)) = \sigma(\cup_{t\in S}\pi_t^{-1}(\mathcal{C}_t)) \subset \sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$$

因此 $\mathcal{Q} \subset \sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$. 进而 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{Q}) \subset \sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$. 证毕.

注 1. 本题核心是考察无穷维乘积空间上的可测集的定义，即 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{Q})$ (课本第 154 页第 5 行).

注 2. 有些同学先证 $\sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i)) = \sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i))$ 再重复课本上 $\sigma(\cup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i)) = \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 的证明. 这也是可以的，但不够简洁优美.

8. 由题设 $\nu_1 << \mu_1$, $\nu_2 << \mu_2$, 记 $\xi = d\nu_1/d\mu_1$, $\eta = d\nu_2/d\mu_2$. 首先假定 μ_1 和 ν_1, μ_2 和 ν_2 均为有限测度. （否则可以把 Ω 和 S 划分为可列个子集，在每个子集上是有限测度.）这样 ξ 和 η 分别是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_1)$ 和 $(S, \mathcal{S}, \mu_2)$ 上可积函数. 根据 Fubini 定理， $\xi\eta$ 也是 $(\Omega\times S, \mathcal{F}\times\mathcal{S}, \mu_1\times\mu_2)$ 上可积函数. 对于 $A\in\mathcal{F}\times\mathcal{S}$, 定义 $\theta(A) = \int_A(\xi\cdot\eta)d(\mu_1\times\mu_2)$.

若 $B\in\mathcal{F}$, $C\in\mathcal{S}$, 根据 Fubini 定理,

$$\nu_1\times\nu_2(B\times C) = \nu_1(B)\cdot\nu_2(C) = (\int_B \xi d\mu_1)(\int_C \eta d\mu_2) = \int_{B\times C}\xi\eta d(\mu_1\times\mu_2) = \theta(B\times C).$$

(至此可得 5 分)

记 $\Gamma = \{B\times C$, 其中 $B\in\mathcal{F}, C\in\mathcal{S}\}$. 则两个测度 θ 和 $\nu_1\times\nu_2$ 在半环 Γ 上相同，由延拓唯一性， $\theta = \nu_1\times\nu_2$ 对于 $\sigma(\Gamma) = \mathcal{F}\times\mathcal{S}$ 依然成立. 即，对于 $A\in\mathcal{F}\times\mathcal{S}$,

$$\nu_1\times\nu_2(A) = \int_A(\xi\cdot\eta)d(\mu_1\times\mu_2).$$

由此可同时得出绝对连续性和 R-N 导数 (由积分的绝对连续性，课本定理 3.2.3 ，可知 $\nu_1\times\nu_2 << \mu_1\times\mu_2$). 证毕.

注一，一些同学证明 $\mathcal{G} = \{A\in\mathcal{F}\times\mathcal{S}, \quad \theta(A) = \nu_1\times\nu_2(A)\}$ 是 λ- 类，而前面已经证明 $\Gamma\subset\mathcal{G}$. 所以根据 $\pi-\lambda$ 引理， $\mathcal{G}\supset\sigma(\Gamma) = \mathcal{F}\times\mathcal{S}$. 对于 $A\in\mathcal{F}\times\mathcal{S}$, $\theta(A) = \nu_1\times\nu_2(A)$.

注二. 许多同学花了不少篇幅去证 $\nu_1\times\nu_2 << \mu_1\times\mu_2$, 殊不知此乃第二部分的推论.

9. 等式不成立. （写出这 5 个字可得 5 分). 取 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i) = (R, \mathcal{B}, m)$. 其中 m 为勒贝格测度， $\mathcal{B}$ 为博雷尔集全体. 则 $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{L}$ 为勒贝格可测集全体. 取 A 为一维勒贝格不可测集，则 $A\times\{0\}$ 是二维零测集，因此由完备性， $A\times\{0\}\in\overline{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$, 但 $A\times\{0\}\notin\mathcal{L}\times\mathcal{L}$.

注：有些同学没有断言等式是否成立，只证明了 $\overline{\mathcal{F}}_1\times\overline{\mathcal{F}}_2\subset\overline{\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2}$, 得 2 分.

10. (1) 固定 $\omega\in\Omega_1$, 先证 $\lambda_1\circ\lambda_2(\omega,\cdot)$ 是定义在 $\mathcal{F}_3$ 上的概率测度.

$$\lambda_1\circ\lambda_2(\omega,\emptyset) = \int\lambda_2(\omega_2,\emptyset)\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \int 0\cdot\lambda_1(\omega, d\omega_2) = 0.$$

$$\lambda_1\circ\lambda_2(\omega,\Omega_3) = \int\lambda_2(\omega_2,\Omega_3)\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \int 1\cdot\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \lambda_1(\omega,\Omega_2) = 1.$$

如果 $A_n\in\mathcal{F}_3$, $\{A_n\}$ 互不相交，则

$$\lambda_1\circ\lambda_2(\omega,\cup_n A_n) = \int\lambda_2(\omega_2,\cup_n A_n)\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \int[\sum_n\lambda_2(\omega_2, A_n)]\cdot\lambda_1(\omega, d\omega_2)$$

$$= \sum_n\int\lambda_2(\omega_2, A_n)\cdot\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \sum_n\lambda_1\circ\lambda_2(\omega, A_n).$$

所以 $\lambda_1 \circ \lambda_2(\omega, \cdot)$ 关于第二个变量具有可列可加性，满足概率测度的公理要求．（至此可得 2 分）

再固定 $B \in \mathcal{F}_3$ 验证 $\lambda_1 \circ \lambda_2(\ \cdot\ , B)$ 关于第一个变量是可测的．如果 $\lambda_2(\omega_2, B) = 1_A(\omega_2)$ 是 ω_2 的特征函数，则

$$\lambda_1 \circ \lambda_2(\omega, B) = \int \lambda_2(\omega_2, B)\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \int 1_A(\omega_2)\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \lambda_1(\omega, A),$$

根据 λ_1 的定义，是关于 ω 可测的．如果 $\lambda_2(\omega_2, B) = \sum_n a_n 1_{A_n}(\omega_2)$ 是 ω_2 的简单函数，则

$$\lambda_1 \circ \lambda_2(\omega, B) = \int (\sum_n a_n 1_{A_n}(\omega_2))\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \sum_n a_n \lambda_1(\omega, A_n),$$

是关于 ω 可测函数的线性组合，依然是关于 ω 可测．

一般的 $\lambda_2(\omega_2, B)$ 可用一列简单函数 $\{f_m\}$ 来逼近，其中 $f_m = \sum_n a_{mn} 1_{A_{mn}}(\omega_2)$．而简单函数的极限

$$\lambda_1 \circ \lambda_2(\omega, B) = \int (\lim_m f_m)\lambda_1(\omega, d\omega_2) = \lim_m [\sum_n a_{mn}\lambda_1(\omega, A_{mn})],$$

仍是 ω_2 的可测函数．至此我们验证了 $\lambda_1 \circ \lambda_2$ 是 $\Omega_1 \times \mathcal{F}_3$ 上的概率转移函数．

(2) 对任意 $\omega \in \Omega_1$, $B \in \mathcal{F}_4$, 现来验证

$$((\lambda_1 \circ \lambda_2) \circ \lambda_3)(\omega, B) = (\lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ \lambda_3))(\omega, B). \tag{1}$$

这等价于

$$(\int \left(\int \lambda_2(\omega_2, d\omega_3)\lambda_1(\omega, d\omega_2)\right) \lambda_3(\omega_3, B) = \int \left(\int \lambda_2(\omega_2, d\omega_3)\lambda_3(\omega_3, B)\right) \lambda_1(\omega, d\omega_2). \tag{2}$$

同前半部分的证明，如果 $\lambda_3(\omega_3, B) = 1_A(\omega_3)$, 则

$$((\lambda_1 \circ \lambda_2) \circ \lambda_3)(\omega, B) = \int (\lambda_1 \circ \lambda_2)(\omega, d\omega_3) 1_A(\omega_3) = (\lambda_1 \circ \lambda_2)(\omega, A) = \int \lambda_2(\omega_2, A)\lambda_1(\omega, d\omega_2)$$

而

$$(\lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ \lambda_3))(\omega, B) = \int \left(\int \lambda_2(\omega_2, d\omega_3) 1_A(\omega_3)\right) \lambda_1(\omega, d\omega_2) = \int \lambda_2(\omega_2, A)\lambda_1(\omega, d\omega_2).$$

因此等式 (1) 对于 $\lambda_3(\omega_3, B) = 1_A(\omega_3)$ 成立．取

$$\Gamma = \{g, \quad \int \left(\int \lambda_2(\omega_2, d\omega_3)\lambda_1(\omega, d\omega_2)\right) g(\omega_3) = \int \left(\int \lambda_2(\omega_2, d\omega_3) g(\omega_3)\right) \lambda_1(\omega, d\omega_2)\}.$$

如果 $f, g \in \Gamma$, 实数 $a, b \geq 0$, 则由积分的线性性， $af + bg \in Gamma$, 如果 $g_n \in \Gamma$, g_n 单调上升，由单调收敛定理， $\lim_n g_n \in \Gamma$, 所以 Γ 是单调类，根据单调类定理 (课本定理 1.5.5), Γ 包含一切 $\mathcal{F}_3$- 可测非负函数．特别地，任何概率转移函数 $\lambda_3(\omega_3, B) \in \Gamma$. 命题得证．

注 1: 许多同学声称根据 Fubini 定理可得第二部分，这是行不通的．

注 2. 个别同学不愿意多写，称利用课本引理 5.1.5 的方法可以证明，这是可以接受的偷懒表述．另有一位同学不记得定理编号，但能说出是 Fubini 定理前面第二个定理，这也是可以接受的．而一些同学声称用课本知识可以证明，这样的泛指无效，不能得分．