《概率论》期中考试试卷

2010 年 4 月 21 日，闭卷，每题 10 分

1. 假设 A 与 B 相互独立， A 与 C 相互独立，问 A 与 $B \cup C$ 是否也相互独立？如果是，请给出证明；如果不是，则给出反例.

2. 假定某罐子里共有 20 个球，其中 8 红 7 蓝 5 绿．今从中抽取两个球，已知两球不同色．试求在此条件下两球为一红一蓝的概率.

3. 桌面上有四枚硬币和一枚假币，假币两面都是正面 (带有国徽图案), 其他方面则与另外四枚硬币无异．今取其中一枚硬币投掷四次，均为正面．问随机选取的硬币是假币的概率是多大？

4. The event A is said to be attracted by B if $P(A|B) > P(A)$. Show that if B attracts A then A attracts B. If A attracts B and B attracts C, does A attracts C?

5. 设随机向量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x,y) = 6(x-y), 0 < y < x < 1$; 其他情形则 $f(x,y) = 0$. 试求 X 的边缘分布函数，并求给定 $X = x$ 条件下 Y 的条件密度函数.

6. 假设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从 Γ- 分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 和 $\Gamma(\gamma,\beta)$. 试求 $X+Y$ 的密度函数．注： $\Gamma(\alpha,\beta)$ 的概率密度函数为 $p(x) = \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}/\Gamma(\alpha), x > 0$.

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 试求 $Y = e^X$ 的密度函数.

8. Buffon 投针问题．假设地面上有两族相互垂直的平行线，经线相距 a, 纬线相距 b, 针的长度 $r < \min\{a, b\}$. 随机向地面投针，试求 (1) 投针与同时与经线和纬线相交的概率， (2) 投针既不与经线相交、也不与纬线相交的概率.

9. 设 f 与 g 是分别是随机变量 X 与 Y 的概率密度函数， $0 \le \alpha \le 1$, 证明 $\alpha f + (1-\alpha) g$ 也是概率密度函数，并刻画以此为密度函数的随机变量．试问什么条件可以保证 $f^\alpha g^{1-\alpha}$ 是某个随机变量的密度函数？

10. 设 X_1, X_2, X_3 相互独立，分别服从参数为 p_1, p_2, p_3 的几何分布，试证

$$P(X_1 < X_2 < X_3) = \frac{(1-q_1)(1-q_2)q_2 q_3^2}{(1-q_2q_3)(1-q_1q_2q_3)},$$

其中 $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2, 3$, 并求 $P(X_1 \le X_2 \le X_3)$.

10. 解： $P(X_1\le n)=\sum_{k=1}^n p_1q_1^{k-1}=p_1(1-q_1^n)/(1-q_1)=1-q_1^n$.

由此可得

$$P(X_1\le n-1)=1-q_1^{n-1}; P(X_3\ge n+1)=1-P(X_3\le n)=q_3^n; P(X_3\ge n)=q_3^{n-1}.$$

$$\begin{aligned}
P(X_1<X_2<X_3) &= \sum_{n=2}^{\infty} P(X_1<X_2<X_3, X_2=n)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(X_1<n)P(X_2=n)P(X_3>n)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P(X_1\le n-1)P(X_2=n)P(X_3\ge n+1)=\sum_{n=2}^{\infty}(1-q_1^{n-1})p_2q_2^{n-1}q_3^n\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} p_2q_2^{n-1}q_3^n-\sum_{n=2}^{\infty} q_1^{n-1}p_2q_2^{n-1}q_3^n\\
&= p_2q_3(\sum_{n=1}^{\infty} q_2^nq_3^n-\sum_{n=1}^{\infty} q_1^nq_2^nq_3^n)\\
&= p_2q_3[\frac{1}{1-q_2q_3}-\frac{1}{1-q_1q_2q_3}]=\frac{(1-q_1)(1-q_2)q_2q_3^2}{(1-q_2q_3)(1-q_1q_2q_3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X_1\le X_2\le X_3) &= \sum_{n=2}^{\infty} P(X_1\le X_2\le X_3, X_2=n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1\le n)P(X_2=n)P(X_3\ge n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1\le n)P(X_2=n)P(X_3\ge n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-q_1^n)p_2q_2^{n-1}q_3^{n-1}\\
&= p_2\sum_{n=0}^{\infty} q_2^nq_3^n-p_2q_3\sum_{n=0}^{\infty} q_1^nq_2^nq_3^n\\
&= p_2[\frac{1}{1-q_2q_3}-\frac{q_1}{1-q_1q_2q_3}]=\frac{(1-q_1)(1-q_2)}{(1-q_2q_3)(1-q_1q_2q_3)}
\end{aligned}$$

9. 解： $\alpha f+(1-\alpha)g\ge 0$. $\int[\alpha f(x)+(1-\alpha)g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+(1-\alpha)\int g(x)dx=1$.

设随机变量 Z 服从 Bernoulli 分布， $P(Z=1)=\alpha$, $P(Z=0)=1-\alpha$. Z 与 X,Y 相互独立．取 $W=ZX+(1-Z)Y$. 则

$$P(W\le x)=P(W\le x,Z=1)+P(W\le x,Z=0)=P(X\le x,Z=1)+P(Y\le x,Z=0)$$

$$=P(X\le x)P(Z=1)+P(Y\le x)P(Z=0)=\alpha F_X(x)+(1-\alpha)F_Y(x).$$

等式两端同时关于 x 求导，得 W 的概率密度函数为 $\alpha f+(1-\alpha)g$.

若 $\alpha=0$ 或 1, 或者 $f=g$, 则 $f^\alpha g^{1-\alpha}$ 显然是某个随机变量的密度函数．一般而言，$\int f^\alpha g^{1-\alpha}dx\le(\int fdx)^\alpha(\int gdx)^{1-\alpha}=1$. 若 $f^\alpha g^{1-\alpha}$ 是某个随机变量的密度函数，则 $\int f^\alpha g^{1-\alpha}dx=1$. 这蕴含着上面的不等式必须是等号，而进一步由此推出 f 与 g 成比例，故 $f=g$.

8. 设 X 为针的中点到经线的距离， Y 为针的中点到纬线的距离， θ 为针与经线的夹角．根据以前讨论 Buffon 投针的分析，我们假设 $X\sim U(0,a/2)$, $Y\sim U(0,b/2)$, $\theta\sim U(0,\pi)$, X, Y 与 θ 相互独立．事件 A 表示针与经线相交，则

$$P(A)=P(X\le(r/2)\sin\theta)=\int_0^\pi\int_0^{a/2}\frac{1}{\pi}\frac{2}{a}1_{\{x\le(r/2)\sin\theta\}}dxd\theta=\int_0^\pi\frac{1}{\pi}\frac{r}{a}\sin\theta d\theta=\frac{2r}{a\pi}.$$

同理，事件 $B = (Y \le (r/2)|\cos\theta|)$ 表示针与纬线相交，则 $P(B) = 2r/(b\pi)$.

$$P(AB) = \int_0^{\pi}\int_0^{a/2}\int_0^{b/2}\frac{1}{\pi}\frac{2}{a}\frac{2}{b}1_{\{x\le(r/2)\sin\theta, y\le(r/2)|\cos\theta|\}}dxdyd\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\frac{r}{a}\frac{r}{b}\sin\theta|\cos\theta|d\theta$$

$$= \frac{r^2}{ab\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)d\theta = \frac{r^2}{ab\pi}.$$

$$P(A^cB^c) = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \frac{2r}{a\pi} - \frac{2r}{b\pi} + \frac{r^2}{ab\pi} = 1 - \frac{r}{ab\pi}(2a+2b-r).$$

7. 解：对任意 $y \le 0$, $P(Y \le y) = 0$; 对任意 $y > 0$,

$$P(Y \le y) = P(e^X \le y) = P(X \le \log y) = \int_{-\infty}^{\log y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx.$$

两边关于 y 求导，得 Y 的密度函数为

$$\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(\log y-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

6. 解，由于独立性，(X, Y) 的联合密度函数为

$$\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}1_{\{x>0\}}\frac{\beta^\gamma y^{\gamma-1}e^{-\beta y}}{\Gamma(\gamma)}1_{\{y>0\}}.$$

$$P(X+Y\le z) = \int\int_{x+y\le z}\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}1_{\{x>0\}}\frac{\beta^\gamma y^{\gamma-1}e^{-\beta y}}{\Gamma(\gamma)}1_{\{y>0\}}dxdy.$$

做变量替换，取 $u = x + y$, $x = uv$, 则 $y = (1-v)u$, $dxdy = ududv$. 上式变为

$$\int_0^1\int_0^z\frac{\beta^{\alpha+\gamma}u^{\alpha+\gamma-2}e^{-\beta u}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-1}ududv = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}(\int_0^{\beta z}u^{\alpha+\gamma-1}e^{-u}du)(\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-1}dv).$$

根据 $beta$ 积分的性质 $\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-1}dv = \Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)/\Gamma(\alpha+\gamma)$.

$$P(X+Y\le z) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+\gamma)}(\int_0^{\beta z}u^{\alpha+\gamma-1}e^{-u}du).$$

两边关于 z 求导，得 $X+Y$ 的密度函数为 $\beta^{\alpha+\gamma}z^{\alpha+\gamma-1}e^{-\beta z}/\Gamma(\alpha+\gamma)$, 即 $\Gamma(\alpha+\gamma,\beta)$ 的密度函数.

5. 解：对任何 $0 < x < 1$,

$$p_X(x) = \int f(x,y)dy = \int_{0<y<x}6(y-x)dy = [6xy - 3y^2]|_0^x = 6x^2 - 3x^2 = 3x^2;$$

$$F_X(x) = \int_0^x p_X(s)ds = \int_0^x 3s^2ds = s^3|_0^x = x^3.$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{6(x-y)}{3x^2}1_{\{0<y<x\}}.$$

4. 解： $P(AB)/P(B) = P(A|B) > P(A) \Longrightarrow P(AB) > P(A)P(B)$

$\Longrightarrow P(B|A) = P(AB)/P(A) > P(B)$. This is to say that A attacts B.

If $A\cap C = \emptyset$, then $P(AC) < P(A)P(C)$. In general, one can not conlude that A attracts C from the fact that A attracts $B$and B attracts C.

3. 解：用 Bayes 公式，设 A 为出现四个正面的事件， B 为随机取到假币的事件. 则 $P(B) = 1/5, P(A|B) = 1, P(A|B^c) = 1/2^4$.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} = \frac{1\times(1/5)}{1\times(1/5) + (1/16)\times(4/5)} = \frac{4}{5}.$$

2. 解: 如将球编号, 则共有 20×19 种不同取法, 其中两球不同色的取法共有 $8\times12+7\times13+5\times15=262$ 种, 而一红一蓝或一蓝一红共有 $8\times7+7\times8=112$ 种取法. 故在已知两球不同色的条件下两球为一红一蓝的概率为 $112/262=56/131$.

1. 解: 一般而言, A 与 $B\cup C$ 不相互独立. 已有反例, 如汪书 p.24 例 7.6, A,B,C 两两独立但不相互独立, 即 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$.

$$
\begin{aligned}
P(A\cap(B\cup C) &= P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)\\
&= P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(ABC)\\
&\neq P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(BC)=P(A)P(B\cup C).
\end{aligned}
$$