《应用随机过程》期中考试试卷解答

8. 解：设 $f(x)=P_x(S_\tau=0)$. 则

$$f(0)=1, f(N)=0, \quad f(x)=pf(x+1)+qf(x-1),$$

其中 $1\le x\le N-1, q=1-p$. 于是

$$f(x)-f(x+1)=\frac{q}{p}[f(x-1)-f(x)]=(\frac{q}{p})^x[f(0)-f(1)].$$

$$1=f(0)-f(N)=\sum_{x=0}^{N-1}[f(x-1)-f(x)]=\sum_{x=0}^{N-1}(\frac{q}{p})^x[f(0)-f(1)]$$

$$=\frac{1-(\frac{q}{p})^N}{1-\frac{q}{p}}[f(0)-f(1)].$$

$$[f(0)-f(1)]=\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}.$$

$$1-f(y)=\sum_{x=0}^{y-1}[f(x-1)-f(x)]=\sum_{x=0}^{y-1}(\frac{q}{p})^x[f(0)-f(1)]=\frac{1-(\frac{q}{p})^x}{1-(\frac{q}{p})^N}.$$

$$P_y(S_\tau=0)=1-\frac{1-(\frac{q}{p})^x}{1-(\frac{q}{p})^N}=\frac{(\frac{q}{p})^x-(\frac{q}{p})^N}{1-(\frac{q}{p})^N}.$$

同理，设 $g(x)=E_x\tau$ 则

$$g(0)=g(N)=0, \quad g(x)=1+pg(x+1)+qg(x-1),$$

其中 $1<x<N, q=1-p$. 令 $h(x)=g(x)-g(x+1)-1/(p-q)$, 则上式改写为

$$ph(x)=qh(x-1). \qquad h(x)=\frac{q}{p}h(x-1)=(\frac{q}{p})^x h(0).$$

$$g(0)-g(N)-\frac{N}{p-q}=\sum_{x=0}^{N-1}[g(x)-g(x+1)-\frac{1}{p-q}]=\sum_{x=0}^{N-1}h(x)$$

$$=h(0)\sum_{x=0}^{N-1}(\frac{q}{p})^x=h(0)\frac{1-(\frac{q}{p})^N}{1-\frac{q}{p}}.$$

$$h(0)=-\frac{N}{p-q}\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}.$$

$$g(0)-g(x)-\frac{x}{p-q}=\sum_{y=0}^{x-1}h(y)=h(0)\frac{1-(\frac{q}{p})^x}{1-\frac{q}{p}}=-\frac{N}{p-q}\frac{1-(\frac{q}{p})^x}{1-(\frac{q}{p})^N}.$$

$$g(x)=\frac{N}{p-q}\frac{1-(\frac{q}{p})^x}{1-(\frac{q}{p})^N}-\frac{x}{p-q}.$$

9. 解: 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间是 S, 根据定理 1.5.3, S 可分解为互不相交的 $D_1, D_2, \cdots, D_d$. 若 $x\in D_s$, 记 $|x|=s$, 则 $|X_n|$ 在 $\{1,2,\cdots,d\}$ 上周而复始地做确定性运动, 若 $|X_n|=k<N$,

则 $|X_{n+1}| = k+1$; 若 $|X_n| = N$, 则 $|X_{n+1}| = 1$. 同理, $|Y_n|$ 在 $\{1, 2, \cdots, r\}$ 上周而复始地一步步移动, $(|X_n|, |Y_n|)$ 在 $\{1, 2, \cdots, d\} \times \{1, 2, \cdots, r\}$ 上周而复始一步步移动, 从 (i, j) 到 $(i+1, j+1)$, 从 (d, j) 到 $(1, j+1)$, 从 (i, r) 到 $(i+1, 1)$.

若 d 和 r 的最小公约数 $m > 1$, 则上述 $(|X_n|, |Y_n|)$ 在 $\{1, 2, \cdots, d\} \times \{1, 2, \cdots, r\}$ 移动将分为 m 个互不相交的轨迹 (orbit), 因此 $\{Z_n\}$ 是可约的.

若 d 和 r 互素, 则上述 $(|X_n|, |Y_n|)$ 的移动轨迹 (orbit) 将走遍 $\{1, 2, \cdots, d\} \times \{1, 2, \cdots, r\}$ 上所有顶点, 从任何一点可以到另外一点. 对任意 $x_1, x_2 \in S$, $y_1, y_2 \in T$(其中 T 为 $\{Y_n\}$ 的状态空间), 如果 $(|x_1|, |y_1|)$ 到 $(|x_2|, |y_2|)$ 需要走 s 步的话, 则必有充分大的整数 l 使得 $p_{s+ldr}(x_1, x_2) > 0$, $p_{s+ldr}(y_1, y_2) > 0$, 故 $p_{s+ldr}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) > 0$.

由前面论述, $(|X_n|, |Y_n|)$ 从 $\{1, 2, \cdots, d\} \times \{1, 2, \cdots, r\}$ 上某个顶点出发, 经过 dr 步即访问所有顶点才回到出发点, 因此 $\{Z_n\}$ 的周期是 dr 或 dr 的倍数. 另一方面, 对任何 $x \in S, y \in T$, 可以找到 $d_1, d_2, \cdots d_n$ 与 $r_1, r_2, \cdots r_m$, 使得 $p_{xx}(d_i) > 0$, $p_{yy}(r_j) > 0$, $d_1, d_2, \cdots d_n$ 的最大公约数是 d, $r_1, r_2, \cdots r_m$ 的最大公约数是 r. 存在两组整数 $\{a_i\}$ 和 $\{b_j\}$ 使得 $\sum_i a_i d_i = d$, $\sum_j b_j r_j = r$. 则 $p_{(x,y),(x,y)}(d_i r_j) > 0$, $\sum_{i,j} (a_i b_j)(d_i r_j) = [\sum_i a_i d_i][\sum_j b_j r_j] = dr$. 即 $\{d_i r_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ 的最大公约数是 dr. 因此 $\{Z_n\}$ 的周期为 dr.

10. 证明: (1) 若 $p_2 = 1$, 此时 GW 树就是二分叉的规则树, 已知其上随机游动是非常返的. (2) 若 $p_0 + p_1 = 0$, 与前一情形相比, 分叉更多, 电阻只会更小, 因此其上随机游动是非常返的. (3) 若 $p_0 = 0$, 与前一情形相比, 只是把每一条边按照几何分布延长若干倍, 相应电阻变大若干倍, 总电阻也相应放大若干倍, 仍是有限, 因此其上随机游动是非常返的 (这一步不够严格). (4) 若 $p_0 > 0$, 利用课本第 61-62 页的分解, 可以把一无穷 Galton-Watson 树 T 分解为一棵无穷树 (绿色) 和许多有限树 (红色). 根据前面分析, 无穷树 (绿色) 的电阻是有限的, 而有限树 (红色) 对总电阻没有影响, 整体无穷树的电阻有限, 所以其上随机游动是非常返的.

严格的证明是利用课本第 57 页上的第一条等式, 构造一个从根点出发的流 f. 若根点有 k 条边相连, 每一条边上的流量是 $1/k$. 一般而言, 设从原点到顶点 x 的流量为 c, 而 x 有 d 个后代, 则从 x 到每一个儿子的流量为 c/d. 这里我们用到了 $p_0 = 0$ 这一假设.

假设从根点 o 到顶点 x 的路径为 $x_0 = o, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = x$, 设 x_i 的儿子数目为 $d(x_i)$ 个, 则从根点到 x 的流量是 $[d(x_0)d(x_1)\cdots d(x_{n-1})]^{-1}$. 注意到每条边 e 的电阻 R_e 均为 1. 故

$$\sum_e f_e^2 R_e = \sum_n \sum_{|x|=n} [d(x_0)d(x_1)\cdots d(x_{n-1})]^{-2}.$$

这个量取决于 GW 树每个顶点的度数 (= 儿子数 +1), 是个随机变量, 不好计算, 但我们只

需要知道这个和号是否收敛. 记 $a=\sum_{k=1}^{\infty} p_k/k$. 由于 $p_1<1$, 所以 $a<1$. 考察其数学期望,

$$
\begin{aligned}
E\sum_e f_e^2 R_e &= \sum_n E\sum_{|x|=n}[d(x_0)d(x_1)\cdots d(x_{n-1})]^{-2} \\
&= \sum_n \sum_{k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}} \frac{1}{k_0^2k_1^2\cdots k_{n-1}^2} p_{k_0}p_{k_1}\cdots p_{k_{n-1}} \\
&= \sum_n \sum_{k_0,k_1,\cdots,k_{n-2}} \frac{1}{k_0^2k_1^2\cdots k_{n-2}^2} p_{k_0}p_{k_1}\cdots p_{k_{n-2}} \sum_{k_{n-1}} \frac{k_{n-1}}{k_{n-1}^2} p_{k_{n-1}} \\
&= \sum_n \sum_{k_0,k_1,\cdots,k_{n-2}} \frac{1}{k_0^2k_1^2\cdots k_{n-2}^2} p_{k_0}p_{k_1}\cdots p_{k_{n-2}} a \\
&= \sum_n a^n < \infty
\end{aligned}
$$

由于数学期望有限，随机变量 $\sum_e f_e^2 R_e$ 几乎处处有限，电阻有限，故无穷 Galton-Watson 树 T 上的简单随机游动是非常返的.