《应用随机过程》期末考试试卷

2005 年 1 月 2 日，半开卷，每题 10 分

布朗运动 在以下五题中 $B_t = B(t)$ 是标准布朗运动，即 $B_0 = 0, EB_t = 0, Var(B_t) = t$.

1. 设 W_t 是与 B_t 独立的标准布朗运动，(1) 若 $\xi_t = aB_t + bW_t$ 也是标准布朗运动，请问 a 和 b 应满足什么条件？ (2) $\eta_t = B(2t) - B(t)$ 是标准布朗运动吗？论证你的结论.

2. 试用布朗运动 B_t 的泛函来表示下列微分方程的解：

$$f''(x) = g(x), \quad x \in (a, b); \quad f(a) = c_1, f(b) = c_2.$$

其中 $g(x)$ 是 (a, b) 上的连续函数，c_1, c_2 为常数.

3. 令 $V(t) = e^{-\alpha t} B(e^{2\alpha t})$, 试求 $EV(t)$ 和 $Cov(V(t), V(s))$. $V(t)$ 是 (宽) 平稳过程吗？

4. 称 $\eta_t = B_t + ct$ 为带漂移的布朗运动，其中 $c > 0$ 是常数．设 $\tau = \inf\{t > 0; \eta_t \notin (a, b)\}$, $a < 0 < b$. 试求 $P_0(\eta_\tau = a)$ 和 $E_0\tau$.

5. 设 $s < t$, 试证

$$P(B_s > 0, B_t > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

Q- 过程

6. 考虑只有两个状态 $\{0, 1\}$ 的生灭过程，$q_{01} = -q_{00} = \lambda, q_{10} = -q_{11} = \mu$, 写出 Kolmogorov 向前公式，并通过解此微分方程求得 $p_{00}(t)$ 和 $p_{11}(t)$ 以及平稳分布.

7. (a) 考察 Q- 过程 $\{X_t\}$ 及其嵌入链 $\{\xi_n\}$, 已知 $\{\xi_n\}$ 是正常返的，问 $\{X_t\}$ 也一定是正常返的吗？ (b) 若把 $M/M/1$ 排队系统改 First-come-first-served 为 Last-come-first-served. 请指出该排队系统的下列随机变量的分布有无变化： (1) 队伍长度， (2) 等候时间， (3) 有人在等候排队.

8. 考虑 $\{1, 2, \cdots, N\}$ 上的 Q- 过程，其转移概率阵 $P(t) = (p_{ij}(t))$. 证明对所有 $t > 0$, $det(P(t)) > 0$.

9. 在某排队系统 $M/M/1$ 中顾客的到达时刻是 Poisson 流，参数为 λ; 服务时间服从指数分布，参数为 μ. 当队伍长度为 n 时新来的顾客以概率 $\frac{n+1}{n+2}$ 加入到等候的队伍，以概率 $\frac{1}{n+2}$ 放弃．试问 (1) 在什么条件下该系统可以有平稳分布？ (2) 当该排队系统达到平稳时平均队伍长度是多少？顾客加入等候队列的概率是多少？

10. 某房产公司在其主页上发布楼房信息，发布时刻构成 Poisson 流，平均每天 λ 条信息．每条信息的房价在 80 万到 200 万之间均匀分布．某先生为购房最多能出价 100 万，因此只研读与他有关的信息．研读每条信息所花时间也是随机变量，在 1 小时到 2 小时之间均匀分布．记他 30 天上网查阅的累计时间为 X, 试求 $E\exp(aX)$, 其中 a 为常数.