《概率论》期末考试试卷

2007 年 6 月 24 日，闭卷，每题 10 分

1. 在有放回的摸球模型中，每次摸得黑球的概率为 0.2. 试问，应至少摸球多少次可保证黑球出现的频率在 0.18 及 0.22 之间的概率大于或等于 0.95?

附常用正态分布值. $\Phi(1.28) = 08997$, $\Phi(1.29) = 0.9015$, $\Phi(1.64) = 0.94950$, $\Phi(1.65) = 0.95053$, $\Phi(1.96) = 0.97500$, $\Phi(2.0) = 0.97725$.

解：设 $\hat{p} = X/n$, 其中 $X \sim B(n, 0.2)$, 要求 $P(0.18 < \hat{p} < 0.22) \geq 0.95$. 即 $P(|\hat{p} - 0.2| < 0.02) \geq 0.95$, 等价于

$$P\left(|\frac{X - 0.2n}{\sqrt{n}\sqrt{0.2 \cdot 0.8}}| < \frac{0.02\sqrt{n}}{0.4}\right) \geq 0.95$$

由中心极限定理， $\Phi(\frac{0.02\sqrt{n}}{0.4}) - \Phi(-\frac{0.02\sqrt{n}}{0.4}) \geq 0.95$ 由正态分布的对称性， $\Phi(\frac{0.02\sqrt{n}}{0.4}) \geq 0.975$ ，查表得 $\sqrt{n}/20 \geq 1.96$. 答案 =1537.

注：有些同学的答案为 1536 ，被扣 2 分．希望同学们能因此重视数值计算的严谨性.

2. 设 X 是连续型非负随机变量，证明 $EX = \int_0^\infty (1 - F(s))ds$. 其中 $F(x)$ 为 X 的分布函数.

解：对于非负积分，累次积分的顺序可以改变。

$$EX = \int_0^\infty xp(x)dx = \int_0^\infty (\int_0^x dy)p(x)dx = \int_0^\infty \int_y^\infty p(x)dxdy = \int_0^\infty P(X \geq x)dy = \int_0^\infty (1-F(y))dy.$$

另解：用分部积分公式，

$$\int_0^\infty (1 - F(x))dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A (1 - F(x))dx = \lim_{A\to\infty} \left(x(1 - F(x))|_0^A - \int_0^A x(1 - F(x))'dx \right)$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(A(1 - F(A)) + \int_0^A xp(x))dx \right) \geq \liminf_{A\to\infty} \int_0^A xp(x))dx.$$

其中 $p(x) = F'(x)$ 为 X 的密度函数．若 $EX = \int_0^\infty xp(x))dx = \infty$, 则 $\int_0^\infty (1 - F(x))dx$ 也发散．反之，当 $EX = \int_0^\infty xp(x))dx < \infty$, 则 $\lim_{A\to\infty} \int_A^\infty xp(x))dx = 0$. 故

$$0 \leq A(1 - F(A)) = A\int_A^\infty p(x)dx \leq \int_A^\infty xp(x)dx \to 0 \quad asA \to \infty.$$

$$\int_0^\infty (1 - F(x))dx = \lim_{A\to\infty} A(1 - F(A)) + \lim_{A\to\infty} \int_0^A xp(x))dx = \int_0^\infty xp(x))dx.$$

注 1: 大部分同学用的是后一种方法．如果意识到需要证明 $\lim_{A\to\infty} A(1 - F(A)) = 0$ 而没有证对，可得 5 分．如果没有意识到，则得 2 分．如果出现 $\infty - \infty$ 这样的低级错误，则得 0 分.

注 2: 这是汪老师书第 170 页习题 18 的连续版本。

3. 假设随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 依分布收敛于 ξ. 若 ξ 为常数 C, 证明随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 依概率收敛于 C. 若 ξ 不是常数，请举例说明结论一般不成立.

证明部分 (5 分)

$$P(|\xi_n-\xi|>\epsilon)=P(\xi_n>C+\epsilon)+P(\xi_n<C-\epsilon)\le 1-F_n(C+\epsilon)+F_n(C-\epsilon).$$

其中 F_n 为 ξ_n 的分布函数. 由假设， $C+\epsilon$ 和 $C-\epsilon$ 都是 ξ 的分布函数 F 的连续点.

$$F_n(C+\epsilon)\to F(C+\epsilon)=1,\quad F_n(C-\epsilon)\to F(C-\epsilon)=0.$$

因此

$$0\le P(|\xi_n-\xi|>\epsilon)\le 1-F_n(C+\epsilon)+F_n(C-\epsilon)\to 1-1+0=0.$$

举例部分 (5 分): 考虑定义在同一概率空间的一族独立同分布随机变量 $\{Y,X_n,n\ge 1\}$, 服从 $N(0,1)$, 它们分布相同，所以 $\{X_n,n\ge 1\}$ 依分布收敛于 Y. 但 $P(|X_n-Y|\ge 1)\ge P(X_n\ge 0.5)P(Y\le -0.5)=[1-\Phi(0.5)]^2>0$. 说明 $\{X_n,n\ge 1\}$ 不依概率收敛于 Y.

4. 设 G_1 与 G_2 为某两个随机变量的母函数， $0\le\alpha\le 1$. 证明 G_1G_2 和 $\alpha G_1+(1-\alpha)G_2$ 均是母函数.

解: 设随机变量 X,Y 的母函数分别为 G_1 与 G_2, 再设随机变量 η 服从 Bernoulli 分布，$P(\eta=1)=\alpha$, $P(\eta=0)=1-\alpha$. 进一步设 X,Y,η 相互独立. 则 $X+Y$ 的母函数 $Ez^{X+Y}=Ez^XEZ^Y=G_1\cdot G_2$; $\eta X+(1-\eta)Y$ 的母函数 $Ez^{\eta X+(1-\eta)Y}=P(\eta=1)Ez^X+P(\eta=0)Ez^Y=\alpha G_1+(1-\alpha)G_2$.

解法二：设 $G_1(z)=\sum_{k=0}^\infty a_kz^k$, $G_2(z)=\sum_{k=0}^\infty b_kz^k$, 其中 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 是两列概率分布列，即 $a_k\ge 0,b_k\ge 0,\sum_{k=0}^\infty a_k=\sum_{k=0}^\infty b_k=1$. 则

$$G_1(z)G_2(z)=(\sum_{k=0}^\infty a_kz^k)(\sum_{k=0}^\infty b_kz^k)=\sum_{k=0}^\infty(\sum_{l=0}^k a_lb_{k-l})z^k=\sum_{k=0}^\infty c_kz^k$$

$$\alpha G_1(z)+(1-\alpha)G_2(z)=\sum_{k=0}^\infty(\alpha a_k+(1-\alpha)b_k)z^k=\sum_{k=0}^\infty d_kz^k.$$

其中 $c_k=\sum_{l=0}^k a_lb_{k-l},d_k=\alpha a_k+(1-\alpha)b_k$. 则 $\{c_k\}$ 和 $\{d_k\}$ 是概率分布列. 取随机变量 U,V 使得 $P(U=k)=c_k,P(V=k)=d_k$. 随机变量 U,V 的母函数分别是 G_1G_2 和 $\alpha G_1+(1-\alpha)G_2$ 。

注：原题还有第三部分，验证 $G(\alpha s)/G(\alpha)$ 是母函数.

5. 设随机变量 Y_n 服从几何分布，参数 $p=\lambda/n$. 证明 Y_n/n 依分布收敛于 Z, 其中 Z 服从指数分布.

证明：直接按定义验证

$$P(\frac{Y_n}{n} \le y) = P(Y_n \le ny) = \sum_{k=1}^{ny} \frac{\lambda}{n}(1-\frac{\lambda}{n})^{k-1} = \frac{\lambda}{n}\frac{1-(1-\frac{\lambda}{n})^{ny}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})}$$

$$= 1-(1-\frac{\lambda}{n})^{ny} \to 1-e^{-\lambda y} = \int_0^y \lambda e^{-\lambda s} ds = P(Z \le y).$$

其中 Z 服从参数为 λ 的指数分布.

证法二：先计算 Y_n 的特征函数.

$$f_n(t) = Ee^{itY_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{n}(1-\frac{\lambda}{n})^{k-1}e^{itk} = \frac{\frac{\lambda}{n}e^{it}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})e^{it}}$$

Y_n/n 的特征函数为

$$\frac{\frac{\lambda}{n}e^{it/n}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})e^{it/n}} = \frac{\frac{\lambda}{n}e^{it/n}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})(1+\frac{it}{n}+o(\frac{1}{n}))} = \frac{\frac{\lambda}{n}e^{it/n}}{\frac{\lambda}{n}-\frac{it}{n}+o(\frac{1}{n})} = \frac{\lambda e^{it/n}}{\lambda - it + o(1)}.$$

当 $n \to \infty$, 上式收敛于

$$\frac{\lambda}{\lambda - it} = \int_0^{\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = Ee^{itZ}.$$

根据连续性定理， Y_n/n 依分布收敛于 Z, 其中 Z 服从参数为 λ 的指数分布.

注：有些同学只写了

$$\lim_n \frac{\frac{\lambda}{n}e^{it/n}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})e^{it/n}} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

这有两种可能．或许他 / 她是天才，以上的推导不在话下，不屑去做；也可能他 / 她做不出来，根据题目的要求凑的答案．同学们有必要多写几句话，免得我瞎猜测．何为证明？就是把 $A = B$ 这样一句话加长为 $A = C = D = \cdots = E = B$. 其中每一个等号都是我们已经掌握的一小步，使任何一位具有同样训练的人都能接受.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为一列相互独立随机变量， X_i 服从 $N(\mu_i, 1)$. 令 $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$. 试证 Y 的特征函数

$$f_Y(t) = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}}\exp(\frac{it\theta}{1-2it}).$$

其中 $\theta = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2$.

解：只要证明 X_i^2 的特征函数

$$f_{X_i^2}(t) = \frac{1}{(1-2it)^{1/2}}\exp(\frac{it\mu_i^2}{1-2it}).$$

再利用独立性即可得到所求答案 (提到独立性可得 2 分). 现来计算 X_1^2 的特征函数．其他同理可得.

$$f_{X_1^2}(t) = Ee^{itX_1^2} = \int e^{itx^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{M(x)}dx.$$

其中

$$M(x)=itx^2-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}=-\frac{x^2}{2}(1-2it)+\mu_1x-\frac{\mu_1^2}{2}=-\frac{(1-2it)}{2}(x-\frac{\mu_1}{1-2it})^2+\frac{i\mu_1^2t}{1-2it}.$$

$$f_{X_1^2}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{(1-2it)}{2}(x-\frac{\mu_1}{1-2it})^2+\frac{i\mu_1^2t}{1-2it}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{i\mu_1^2t}{1-2it}}\int e^{-\frac{(1-2it)}{2}y^2}dy=\frac{1}{(1-2it)^{1/2}}\exp(\frac{it\mu_1^2}{1-2it}).$$

注：有些同学先算 X_i^2 的密度函数，这是不必要．即使最后答案正确，也要扣 2 分．

7. 取 n 个独立随机变量，服从 $[0,1]$ 上均匀分布．设 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 为其顺序统计量． 试求 $Cov(X_{(1)},X_{(n)})$

解： $P(X_{(n)}\le x)=x^n$． $X_{(n)}$ 的密度函数为 $p(x)=nx^{n-1},0\le x\le 1$, $EX_{(n)}=\int xp(x)dx=\int_0^1 nx^ndx=n/(n+1)$. 同理， $EX_{(1)}=1/(n+1)$. (至此可得 2 分.) $X_{(1)},X_{(n)}$ 的联合密度函数为 $n(n-1)(y-x)^{n-2}$, $0\le x<y\le 1$,(至此可得 5 分.)

$$EX_{(1)}X_{(n)}=\int_0^1\int_0^y xyn(n-1)(y-x)^{n-2}dxdy=n(n-1)\int_0^1 y\left(\int_0^y x(y-x)^{n-2}dx\right)dy$$

$$=n(n-1)\int_0^1 y^{n+1}\left(\int_0^1 u(1-u)^{n-2}du\right)dy=n(n-1)\left(\int_0^1 y^{n+1}dy\right)\left(\int_0^1 u(1-u)^{n-2}du\right)$$

这里做了变量替换 $u=x/y$ 并分离变量，最后一项成了 $Beta-$ 积分.

$$=n(n-1)\frac{1}{n+2}B(2,n-1)=n(n-1)\frac{1}{n+2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+1)}=\frac{n(n-1)}{n+2}\cdot\frac{1\cdot\Gamma(n-1)}{n(n-1)\Gamma(n-1)}=\frac{1}{n+2}.$$

$$Cov(X_{(1)},X_{(n)})=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{(n+1)}\frac{n}{(n+1)}=\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

注 1: 也有同学用 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n-1)},X_{(n)}$ 的联合密度函数 $n!1_{\{0<x_1<x_2<\cdots<x_n\}}$ 直接计算 $EX_{(1)}X_{(n)}$ 如下

$$EX_{(1)}X_{(n)}=\int\int\cdots\int x_1x_n\ n!\ 1_{\{0<x_1<x_2<\cdots<x_n\}}dx_1\cdots dx_n$$

$$=n!\int_0^1\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_2}x_1x_ndx_1\cdots dx_n=n!\int_0^1\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_3}\frac{1}{2}x_2^2x_ndx_2\cdots dx_n$$

$$=n!\int_0^1\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_4}\frac{1}{3!}x_3^3x_ndx_3\cdots dx_n=\cdots=n!\int_0^1\frac{1}{n!}x_n^nx_ndx_n=\frac{1}{n+2}.$$

另一种解法需要一点概率直观，在给定 $X_{(n)}=y$ 的条件下， $X_{(1)}$ 是服从 $[0,y]$ 上均匀分布的 $n-1$ 个独立随机变量的第一个顺序统计量．因此 $E(X_{(1)}|X_{(n)}=y)=y/n$.

$$EX_{(1)}X_{(n)}=E\left(E(X_{(1)}|X_{(n)})X_{(n)}\right)=EX_{(n)}^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n+2}.$$

注 2: 原题为，证明 $Cov(X_{(r)},X_{(s)})=\frac{r(n-s+1)}{(n+1)^2(n+2)}$.

8. 重复抛投一枚硬币，假设每次试验是相互独立的，出现正面的概率为 p. 令 T_n 是首次出现连续 n 次正面的时刻，即从 T_n-n+1 次试验开始，连续 n 次都得到正面，而在此之前连续得

到正面的次数均少于 n 次。试证 T_n 的母函数 $G_n(s)=(1-ps)p^ns^n/(1-s+qp^ns^{n+1})$.
(提示，先证明 $G_n=psG_{n-1}/(1-qsG_{n-1})$.)

解：若 T_k 之后的第一次试验出现正面，则 $T_{k+1}=T_k+1$, 这样的可能性为 p; 若 T_k 之后的第一次试验出现反面，则以前的所有记录都无助于 T_{k+1} 的出现，一切从头再来．设 $T_{k,1},T_{k,2},\cdots$ 为一列独立同分布随机变量序列，与 T_k 同分布．则由前面的分析可得

$$P(T_{k+1}=T_{k,1}+1)=p;$$

$$P(T_{k+1}=T_{k,1}+T_{k,2}+2)=(1-p)p;$$

$$P(T_{k+1}=T_{k,1}+T_{k,2}+\cdots T_{k,l}+l)=(1-p)^{(l-1)}p;$$

于是 $Es^{T_{k+1}}=\sum_{l=1}^{\infty}(1-p)^{(l-1)}ps^l(Es^{T_k})^l$, 即 $G_n=psG_{n-1}/(1-qsG_{n-1})$.

（以上为 5 分，以下也是 5 分。）今用归纳法证明

$$G_n(s)=\frac{(1-ps)p^ns^n}{1-s+qp^ns^{n+1}}.$$

$$G_1=\sum_{l=1}^{\infty}(1-p)^{(l-1)}ps^l=\frac{ps}{1-qs}=\frac{(1-ps)ps}{(1-ps)(1-qs)}=\frac{(1-ps)ps}{1-s+qps^2}.$$

所以等式对于 $n=1$ 时成立．假设等式对于 $n=k$ 时成立，则

$$G_{k+1}(s)=\frac{psG_k(s)}{1-qsG_k(s)}=\frac{ps\frac{(1-ps)p^ks^k}{1-s+qp^ks^{k+1}}}{1-qs\frac{(1-ps)p^ks^k}{1-s+qp^ks^{k+1}}}$$

$$=\frac{ps(1-ps)p^ks^k}{1-s+qp^ks^{k+1}-qs(1-ps)p^ks^k}=\frac{(1-ps)p^{k+1}s^{k+1}}{1-s+qp^{k+1}s^{k+2}}.$$

等式对于 $n=k+1$ 也成立．由归纳法，等式对于所有 n 都成立.

也有同学得到如下递推公式

$$\frac{1}{G_n}=\frac{1}{ps}\frac{1}{G_{n-1}}-\frac{q}{p}.$$

$$\frac{1}{G_n}-\frac{qs}{1-ps}=\frac{1}{ps}\left(\frac{1}{G_{n-1}}-\frac{qs}{1-ps}\right)=\frac{1}{(ps)^{n-1}}\left(\frac{1}{G_1}-\frac{qs}{1-ps}\right).$$

$$\frac{1}{G_n}=\frac{qs}{1-ps}+\frac{1}{(ps)^{n-1}}\left(\frac{1-qs}{ps}-\frac{qs}{1-ps}\right)$$

$$=\frac{qs(ps)^n+(1-qs)(1-ps)-qs(ps)}{(1-ps)(ps)^n}=\frac{qp^ns^{n+1}+1-s}{(1-ps)(ps)^n}.$$

于是

$$G_n(s)=\frac{(1-ps)(ps)^n}{1-s+qp^ns^{n+1}}.$$

9. 假设随机变量 U,Y,Z 相互独立， U 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布， $X=U(Y+Z)$. 试问 X,Y,Z 是否可能具有相同的分布？如果是，请举例；如果不是，请证明.　(退化情形 X=Y=Z =0 不算.)

解：记 $f(t)$ 为 r.v.X 的 ch.f. 则 $f(t) = Ee^{itX} = Ee^{itU(Y+Z)} = \int_0^1 f^2(tu)du = \frac{1}{t}\int_0^t f^2(s)ds$. 其中 $s = tu$ 是做了变量变换. 于是

$$tf(t) = \int_0^t f^2(s)ds.$$

两边关于 t 求导，得

$$f(t) + tf'(t) = f^2(t).$$

$$\frac{1}{f(t)} - t(\frac{1}{f(t)})' = 1.$$

令 $h(t) = 1 - 1/f(t)$, 则 $h(t) = th'(t)$. 解得 $t/h(t) = C$. 即 $f(t) = C/(C-t)$. 取 $C = -i\lambda$. 则 $f(t) = \lambda/(\lambda - it)$ 为指数分布的特征函数.

另解：设 $EX = EY = EZ = \lambda$, 则 $EX^2 = E(Y+Z)^2U^2 = (1/3)(EY^2 + EZ^2 + 2EYEZ)$. 利用 $EX^2 = EY^2 = EZ^2$, 可得 $EX^2 = 2\lambda^2$. 进一步设 $EX^k = k!\lambda^k$ 对于 $k \le n$ 均成立. 则

$$EX^{n+1} = EU^{n+1}E\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k Y^k Z^{n+1-k} = \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k EY^k EZ^{n+1-k}$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(EY^{n+1} + EZ^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k EY^k EZ^{n+1-k}\right)$$

用归纳假设

$$nEX^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k EY^k EZ^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} k!\lambda^k (n+1-k)!\lambda^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (n+1)!\lambda^{n+1} = n(n+1)!\lambda^{n+1}.$$

由此证明 $EX^k = k!\lambda^k$ 对于一切 k 都成立.

$$Ee^{itX} = \sum_{k=0} \frac{(it)^k}{k!} EX^k = \sum_{k=0} \frac{(it)^k}{k!} k!\lambda^k = \frac{1}{1 - it\lambda}.$$

而这是指数分布的特征函数. 由特征函数的唯一性，得知 X 服从指数分布. (有一位同学根据 $EX^2 = 2(EX)^2$ 就大胆断言 X 服从指数分布，虽不严密却有灵气，我给了 8 分.)

10. 设 X 服从 Γ 分布，参数为 $(1, s)$. 给定 $X = x$, 随机变量 Y 服从以 x 为参数的 Poisson 分布. 试求 Y 的特征函数，并证明当 $s \to \infty$ 时， $(Y - EY)/\sqrt{Var(Y)}$ 依分布收敛于 Z, 其中 $Z \sim N(0, 1)$. (注，参数为 $(1, s)$ 的 Γ 分布的密度函数为 $p(x) = x^{s-1}e^{-x}/\Gamma(s), x \ge 0$.)

解：

$$E(e^{itY}|X = x) = \sum e^{itn}\frac{x^n}{x!}e^{-x} = e^{xe^{it}}e^{-x}.$$

$$Ee^{itY} = \int_0^\infty e^{xe^{it}}e^{-x}\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}e^{-x}dx = \frac{1}{(2 - e^{it})^s}.$$

$$EY = \int x \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = s$$

$$EY^2 = \int (x^2 + x) \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(s+2) + \Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = (s+1)s + s = s^2 + 2s.$$

$$Var(Y) = 2s.$$

$(Y - EY)/\sqrt{Var(Y)} = (Y - s)/\sqrt{2s}$ 的特征函数为 $e^{-it\sqrt{s/2}}(2 - e^{it/\sqrt{2s}})^{-s}$. 其指数为

$$-it\sqrt{\frac{s}{2}} - s\log(2 - e^{it/\sqrt{2s}}) = -it\sqrt{\frac{s}{2}} + s(-1 + e^{it/\sqrt{2s}}) + s\frac{1}{2}(-1 + e^{it/\sqrt{2s}})^2 \cdots$$

而

$$-1 + e^{it/\sqrt{2s}} = \frac{it}{\sqrt{2s}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2s} + o(\frac{1}{s}).$$

故指数可进一步化简为

$$-it\sqrt{\frac{s}{2}} + s\frac{it}{\sqrt{2s}} - s\frac{t^2}{4s} + s\ o(\frac{1}{s}) + \frac{s}{2}\left(-\frac{t^2}{2s} + o(\frac{1}{s})\right) = -\frac{t^2}{2} + o(1) \to -\frac{t^2}{2}.$$

即，当 $s \to \infty$ 时，$(Y - EY)/\sqrt{Var(Y)}$ 的特征函数收敛于标准正态分布的特征函数，故 $(Y - EY)/\sqrt{Var(Y)}$ 依分布收敛于 Z, 其中 $Z \sim N(0,1)$.