《随机过程论》期末考试试卷

1999 年 7 月 12 日，每题 10 分

1. 设 $\{B_t\}$ 是一维（标准）布朗运动，证明 $\{t \in [0,1] : B_t \text{ is a local maximum}\}$ 是 [0,1] 中稠密集。

2. B_t 同上题，证明 $R = \inf\{t > 1 : B_t = 0\}$ 的概率密度为

$$P_0(R = 1 + t) = \frac{1}{\pi t^{1/2}(1+t)}.$$

3. B_t 同上题，取 $a, b > 0$, 令 $\tau = \inf\{t > 0 : B_t = a + bt\}$. 证明：

(i) $\exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$ 是鞅；

(ii) $E_0 \exp(-\lambda\tau) = \exp(-a\{b + (b^2 + 2\lambda)^{1/2}\})$.

4. (i) B_t 同上题， $M_t = \max_{0 \le s \le t} B_s$. 求证 $P_0(M_t = a, B_t = x)$ 的密度函数为

$$\frac{2(2a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(2a-x)^2/2t}.$$

(ii) 设 $\{W_t\}$ 是一维（标准）布朗桥，证明 $P(\max_{0 \le t \le 1} W_t > b) = e^{-2b^2}$.

5. 假设 $S_0, S_1, S_2, \cdots$ 是 Z^d 上简单随机游动， $R_n = |\{S_0, S_1, S_2, \cdots, S_n\}|$. 试用 *次可加遍历定理* 证明： $\lim_n R_n/n = P(S_n \neq S_0, \text{ for all } n \ge 1)$.

6. 续上题，假设 $d = 1$, 此时 $R_n = 1 + \max_{k \le n} S_k - \min_{k \le n} S_k$. 证明 $R_n/\sqrt{n}$ 依分布收敛.

7. 设 R_α, R_β 是豫解算子，证明 $R_\alpha - R_\beta = (\beta - \alpha) R_\alpha R_\beta = (\beta - \alpha) R_\beta R_\alpha$.

8. 证明下列两命题等价：（ i ）乘积空间 $S \times S'$ 的一族概率测度是胎紧的；（ ii ）在 S 和 S' 上的两族边缘测度均是胎紧的.

9. 试举一例： T 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上遍历的保测变换，但 T^2 不是遍历的.

10. 假设 $n < \infty$, 序列 $\{Y_1, Y_2, \cdots\}$ 具有如下性质： $(Y_{nk+1}, \cdots, Y_{n(k+1)}), k \ge 0$ 独立同分布. 又设 ν 是与 $\{Y_1, Y_2, \cdots\}$ 独立的随机变量，服从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上均匀分布。令 $Z_m = Y_{\nu+m}, m \ge 1$. 证明 $\{Z\}$ 是平稳遍历的.