《高等概率论》期末考试试卷

2001 年 1 月 8 日，开卷，每题 10 分

1. 假设 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立， $P(X_n = 1) = p_n, P(X_n = 0) = 1 - p_n$, 试求 (1) $X_n \to 0$ 依概率收敛的充要条件； (2) $X_n \to 0$ 几乎处处收敛的充要条件.

2. 考虑另一种更新过程. 假定 X_i 是第 i 个灯泡的寿命， Y_i 是该灯泡坏了以后到安装新灯泡之间的等待时间. 假定 $\{X_i\}$ 为 $i.i.d.$, $X_1 > 0$, $EX_1 < \infty$; $\{Y_i\}$ 也是 $i.i.d.$, $Y_1 > 0$, $EY_1 < \infty$, 而且 $\{X_i\}$ 和 $\{Y_i\}$ 相互独立. 记 R_t 为时间 $[0, t]$ 区间内灯泡亮着的时间总和，试证 $R_t/t \to EX_1/(EX_1 + EY_1)$ $a.s.$

3. 假设 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布， $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. 假设 $S_n/n \to 0$ 依概率收敛，则 $\max_{1 \le k \le n} S_k/n \to 0$ 依概率收敛.

4. 以 $\Rightarrow$ 表示依分布收敛， c 表示常数. 若 $X_n \Rightarrow X, Y_n \Rightarrow c$, 则 $X_n + Y_n \Rightarrow X + c$.

5. 假设 $\phi(t)$ 是概率测度 μ 的特征函数，试证

$$\mu(\{a\}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-ita} \phi(t) dt.$$

6. 证明 Lyapunov 定理. 假设 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立，令 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ， $\alpha_n = \{var(S_n)\}^{1/2}$. 若存在 $\delta > 0$ 使得 $\lim_{n\to\infty} {\alpha_n}^{-2-\delta} \sum_{k=1}^{n} E|X_k - EX_k|^{2+\delta} = 0$, 则 $(S_n - ES_n)/\alpha_n \Rightarrow \chi$. 其中 χ 服从标准正态分布， $\Rightarrow$ 表示依分布收敛.

7. 设随机变量 $X \ge 0$, $EX = \infty$. X 关于 $\mathcal{G}$ 可测， $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. 试证存在唯一的 $\mathcal{F}$ 可测随机变量 Y 满足以下性质： $0 \le Y \le \infty$, 对任意 $A \in \mathcal{F}$ 均有 $\int_A X dP = \int_A Y dP$.

8. 设非负随机变量 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$ 相互独立同分布，令 $X_n = \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n$. (1) 请问 $\{X_n\}$ 是鞅的充要条件是什么？此时由鞅收敛定理你能得出什么结论？ (2) 请问 $\{X_n\}$ 是一致可积鞅的充要条件是什么？

9. 假设 $\theta, Z_1, Z_2 \cdots$ 为相互独立随机变量，具有一阶矩，而且 $Z_1, Z_2, \cdots$ 有相同的分布，试证

$$E(\theta | Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \to \theta \quad a.s., \qquad \text{其中 } Y_i = \theta + Z_i.$$

10. 设随机变量 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$ 独立同分布, 具有二阶矩, 记 $E\zeta_1 = \mu, Var(\zeta_i) = \sigma^2$. 令 $S_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n$, $S_0 = 0$. (1) 证明 $X_n = S_n^2 - 2\mu n S_n + \mu^2 n^2 - n\sigma^2$ 是鞅;

(2) 进一步假设 ζ_i 非负的， τ 为停时， $E\tau^2 < \infty$. 试证 $ES_\tau^2 = 2\mu E\tau S_\tau - \mu^2 E\tau^2 + \sigma^2 E\tau$.

(3) 证明 $ES_\tau^2 \le 2\mu^2 E\tau^2 + 2\sigma^2 E\tau$.

(4) 进一步假设 τ 与 $\{\zeta_i\}$ 相互独立，试用条件期望的性质证明 $E\tau S_\tau = \mu E\tau^2$. 因此

$$ES_\tau^2 = \mu^2 E\tau^2 + \sigma^2 E\tau.$$