《高等概率论》期末考试试卷

2002 年 1 月 17 日，开卷，每题 10 分

1. 设 $\{\xi_n = (\xi_{n,1}, \cdots, \xi_{n,k}),\ n \geq 1\}$ 和 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_k)$ 是 k 维随机向量. 以 $\Rightarrow$ 表示依分布收敛. 证明： $\xi_n \Rightarrow \xi$ 当且仅当对任意 $(a_1, \cdots, a_k) \in R^k$, $\sum_{j=1}^k a_j \xi_{n,j} \Rightarrow \sum_{j=1}^k a_j \xi_j$. 你能举一反三给出其他类似命题吗？

2. 设 $\{\xi_{n,k}; 1 \leq k \leq k_n,\ n \geq 1\}$ 满足 $k_n \to \infty$, 对任意 $n \geq 1$, $\xi_{n,1}, \cdots, \xi_{n,k_n}$ 独立同分布，写出此时 Lindeberg 条件的特殊形式。

3. 设 $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ 是 m 相依序列，即，若 $|i-j| > m$ ，则 ξ_i 与 ξ_j 相互独立。又设 $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ 是同分布的， $E|\xi_n| < \infty$. 记 $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geq 1$. 假设 τ 是关于 $\{\sigma(\xi_1 \cdots, \xi_n),\ n \geq 1\}$ 的可积停时。证明 $ES_{\tau+m} = (E\tau + m)E\xi_1$. 其中“相同分布”可以减弱为“相同均值”吗？

4. (1) 定义 $var(X|\mathcal{F}) = E(X^2|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})^2$, 证明 $var(X) = E(var(X|\mathcal{F})) + var(E(X|\mathcal{F}))$.
(2) 假设随机变量 X 和 Y 都是平方可积，证明条件 Cauchy-Schwarz 不等式

$$E(XY|\mathcal{F})^2 \leq E(X^2|\mathcal{F})E(Y^2|\mathcal{F}).$$

5. 如果 f 是距离空间 X 到 Y 的连续映射， $\mathcal{M}$ 是 X 上相对紧的概率测度族，则 $\{\nu f^{-1}; \nu \in \mathcal{M}\}$ 是 Y 上相对紧的概率测度族。

6. 叙述 stable distribution (有的书上也称 stable law) 和 infinitely divisible distribution 的定义，请问两者之间有何联系？证明你的结论。

7. 证明：若 X_n 和 Y_n 是关于 $\mathcal{F}_n$ 的下鞅，则 $X_n \vee Y_n$ 也是关于 $\mathcal{F}_n$ 的下鞅。又问 $\min(X_n, Y_n)$ 如何？如果是下鞅，请证明；如果不是，请给出反例。

8. 设 $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ 独立同分布。证明

$$\frac{\log n}{n} \sum_{k=3}^{n} \frac{\xi_k}{\log k} \to 0 \quad a.s.$$

当且仅当 $E|\xi_1| < \infty, E\xi_1 = 0$.

9. 假设 f 和 g 是 $[0,1]$ 上定义的实可测函数，存在 $C > 0$, 对每 $x \in [0,1]$ ， $0 < f(x) < Cg(x) < \infty$ 均成立，而且 $\int_0^1 g(x)dx < \infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{\sum_{i=1}^n g(x_i)} dx_1 \cdots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x)dx}{\int_0^1 g(x)dx} \quad a.s.$$

10. 证明 $p = 1$ 时的 Doob 不等式. 设 $\{X_n\}$ 是非负下鞅，记 $\log^+ x = \max(\log x, 0)$, 则

$$E \sup_n |X_n| \leq \frac{e}{e-1}(1 + \sup_n EX_n \log^+ X_n).$$

提示：用下列不等式代替 Hölder 不等式，对任意 $a \geq 0$, $b > 0$, $a \log^+ b \leq a \log^+ a + b/e$.