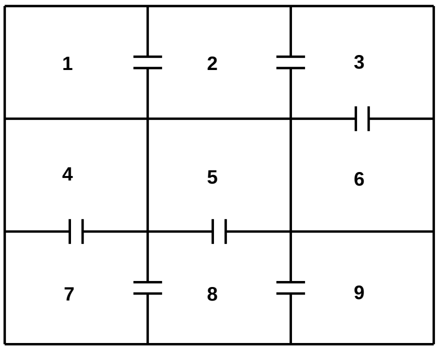
《应用随机过程》期中考试试卷

2004 年 11 月 4 日，每题 10 分

1. 将小白鼠放在如下图所示的迷宫中作随机的移动. 即，当它处于某一格子而此格子又有 k 个门通入其他格子, 则小白鼠以 $1/k$ 的概率选择任一条路径. 假如小白鼠每次移动一个格子, 试写出它的转移概率，并按互通的关系分解状态空间.



2. 设 $\{\xi_t\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，$T=\inf\{t;\xi_t=1\}$, $N=\xi_{T(1+\alpha)}-\xi_T$, 即 $[T,T(1+\alpha)]$ 中 ξ_t 的跳跃次数. 求 NT 的一阶矩和二阶矩.

3. 完整叙述 Wald 的两个引理并证明 Wald 第一引理.

4. 每个顶点都有 d 条边的树称为 $d-$ 规则树. 假定 $d\geq 3$. 证明 $d-$ 规则树上的简单随机游动是非常返的.

5. 对于给定的马氏链，证明其所有不变分布全体构成一个凸集.

6. 用数学等式表示：在已知过程现在所处的状态的条件下，过去和未来的是相互独立的. 证明这一等式与马氏性等价.

7. 设状态 y 是非常返的，对任意 x, 恒有 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{xy}(n)\leq\sum_{n=0}^{\infty}p_{yy}(n)$. 试证明之.

8. 考虑 $\{0,1,2,3,\cdots\}$ 上的马氏链 $\{X_n\}$, 其转移概率为 $p(0,1)=1$;

$$p(x,x+1)=\frac{x^2+2x+1}{2x^2+2x+1},\quad p(x,x-1)=\frac{x^2}{2x^2+2x+1}\quad x\geq 1;$$

若 $|x-y|\geq 2$, 则 $p(x,y)=0$. 证明该马氏链是非常返的并计算 $\rho_x=P(\tau<\infty|X_0=x)$, 其中 $\tau=\min\{n\geq 1,X_n=0\}$. 提示： $\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2=\pi^2/6$.

9. 证明：任何一列取整数值的独立随机变量序列是马氏链. 追加什么条件可使之成为时齐马氏链？

10. 某数据通信系统由 n 个中继站组成，从上一站向下一站传送信号 0 或 1 时，接收正确率为 p. 如用 X_0 表示初始站发出的数字. X_k 表示经过 k 次传送后接收到的数字，$\{X_k\}$ 构成马氏链. 试证

$$P(X_0=1|X_n=1)=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(\alpha-\beta)(p-q)^n},$$

其中 $\alpha=P(X_0=1)$, $\beta=1-\alpha$, $q=1-p$. 请说明上述条件概率的实际意义.