随机游动

应用随机过程补充讲义之一

1 引言

随机过程 是定义在同一概率空间的一族随机变量 $\{X_t, t \in T\}$. 其中参数 t 通常解释为 *时间*. T 可以是有限集，正整数全体，实数全体，还可以是高维的（这时不能解释为时间了). 概率论中所讨论的独立同分布随机变量序列就是一个随机过程. 但我们通常所考虑的随机过程， X_t 和 X_s 之间有某种关系. 这样才有研究的必要，也是问题的难度所在. 通常要利用过程的某些特殊性质. 这些过程也因为不同的性质而获得不同的名称，如 *马氏过程*、*平稳过程*、*高斯过程*、*二阶矩过程*, 等等.

在自然科学、经济活动和日常生活中有大量随机过程的例子. 某地发生地震的时间和震级、股市的每日成交量、等候在某个服务点的顾客人数 (等候在学校东门的出租车数目)，等等. 如果大家留意的话，随机过程无处不在. 本课程所介绍的几类随机过程都是某些具体例子的数学抽象，具有广泛的适用性.

我们所讨论的随机过程大都可以归结为两大类: 马氏过程和平稳过程. 由于课时的限制，我们将主要介绍马氏过程，只在最后简要介绍一下平稳过程. 在北京大学，我们把有关平稳过程的讨论放在《应用时间序列》课里. 俄罗斯数学家马尔可夫率先研究一类具有特殊性质的随机过程, 后人把这种性质称为马尔可夫性质, 把具有马尔可夫性质的随机过程称为马尔可夫过程，简称 *马氏过程*. *随机游动*、*马氏链*、*布朗游动* 都是马氏过程.

2 一维简单随机游动

随机游动 可以说是最简单的随机过程了. 设 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots$ 是一列独立同分布的随机变量序列. 令

$$S_n(\omega) = S_0(\omega) + \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega).$$

称随机变量序列 $\{S_n, n = 0, 1, 2, \cdots,\}$ 为 *随机游动*. 其中 S_0 是与 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots$ 相互独立 (但不同分布) 的随机变量，如无特别声明我们总假定 $S_0 = 0$. 如果

$$P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = 1/2,$$

则称 $\{S_n\}$ 为 *简单随机游动*. 如果

$$P(\xi_n = 1) + P(\xi_n = -1) = 1,$$

则称 $\{S_n\}$ 为 *紧邻随机游动*.

对于简单随机游动而言， $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$ 的各种可能取值共有 2^n 种，每种可能性都是相等的. 而随机向量 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 是随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)$ 的线性变换，所以原则上我们可以算出 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的联合分布. 设 $S_0 = 0$, 若 $n + k$ 为奇数，则

$P(S_n=k)=0$; 若 $n+k$ 为偶数，则 $P(S_n=k)=C_n^{\frac{n+k}{2}}\frac{1}{2^n}$. 利用 Sterling 公式可以进一步得出

$$u_n=P(S_{2n}=0)=C_{2n}^n\frac{1}{2^{2n}}\approx 1/\sqrt{\pi n}. \tag{1}$$

例 1. *反正弦律*. 由习题 4,

$$\begin{aligned}
& P(S_{2l}=0,S_{2l+1}\neq 0,\cdots,S_{2n}\neq 0)\\
= & P(S_{2l}=0)P_0(S_1'\neq 0,S_2'\neq 0,\cdots,S_{2n-2l-1}'\neq 0,S_{2n-2l}'\neq 0)\\
= & u_l u_{n-l}\approx\frac{1}{\pi\sqrt{l}\sqrt{n-l}},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
P(S_{2l}\neq 0,\delta n<l\leq n) &\approx \sum_{l=1}^{\delta n}\frac{1}{\pi\sqrt{l}\sqrt{n-l}}\approx\frac{2}{\pi}\int_0^\delta\frac{1}{\sqrt{x(l-x)}}dx\\
=\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\delta}}\frac{1}{\sqrt{l-y^2}}dy &= \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\delta}.
\end{aligned}$$

当 n 趋向无穷大时， $\approx$ 变为等号，等式称为反正弦律. 布朗运动也有同样的结论.

有时需要运用某些技巧，例如对称性.

例 2: *反射原理*. 考虑简单随机游动，设 $S_0=0$, $n+m$ 为偶数，取 $A_k=\{S_k=m,S_1<m,S_2<m,\cdots,S_{k-1}<m\}$. 则

$$\begin{aligned}
& P(S_n=m,S_1<m,S_2<m,\cdots,S_{n-1}<m)\\
= & P(\xi_n=1,S_{n-1}=m-1,S_1\leq m-1,S_2\leq m-1,\cdots,S_{n-2}\leq m-1)\\
= & \frac{1}{2}P(S_{n-1}=m-1,S_1\leq m-1,S_2\leq m-1,\cdots,S_{n-2}\leq m-1)\\
= & \frac{1}{2}[P(S_{n-1}=m-1)-P(S_{n-1}=m-1,S_k=m\text{ for some }k\leq n-2)]\\
= & \frac{1}{2}[P(S_{n-1}=m-1)-P(S_{n-1}=m-1,\cup_{k=m}^{n-2}A_k)]\\
= & \frac{1}{2}[P(S_{n-1}=m-1)-\sum_{k=m}^{n-2}P(S_{n-1}=m-1,A_k)]\\
= & \frac{1}{2}[P(S_{n-1}=m-1)-\sum_{k=m}^{n-2}P(S_{n-1}=m+1,A_k)]\\
= & \frac{1}{2}[P(S_{n-1}=m-1)-P(S_{n-1}=m+1,\cup_{k=m}^{n-2}A_k)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[P(S_{n-1}=m-1)-P(S_{n-1}=m+1, S_k=m \text{ for some } k\le n-2)] \\
&= \frac{1}{2}[P(S_{n-1}=m-1)-P(S_{n-1}=m+1)] \\
&= \frac{m}{n}C_n^{\frac{m+n}{2}}\frac{1}{2^n}.
\end{aligned}
$$

这里利用了对称性. $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_k,\xi_{k+1}\cdots\xi_{n-1}$ 与 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_k,-\xi_{k+1}\cdots-\xi_{n-1}$ 具有相同的分布，所以

$$P(S_{n-1}=m-1,A_k)=P(S_{n-1}=m+1,A_k).$$

样本空间. 为了把 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 定义在同一概率空间，其样本空间可取为 $\{0,1\}^n$ 共 2^n 个点, 所有子集都是可测集, 每个样本点的概率为 $1/2^n$. 从计算的角度来看, 这样做最简约. 但是这样一来很可能因为不同问题而取不同的样本空间. 例如，我们可以取 $\{0,1\}^{n+m}$ 为样本空间, 视 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots,\xi_{n+m}$ 的一部分，可以同时把 S_n 和 S_{n+m} 放在同一概率空间来处理. 样本空间的取法不唯一，就带来所谓的相容性要求，即，用不同的概率空间来计算相应事件的概率，所得答案应是一致的. 因此，随机过程要求所有随机变量定义在同一概率空间. 为了把 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\cdots$ 定义在同一概率空间，样本空间可取为 $\{0,1\}^\infty$. 其中一个样本点 ω 对应一无穷序列.

明确所讨论问题的样本空间是有好处的. 尽管在许多场合计算概率时，我们并不需要无限的样本空间，仍然要退到有限情形，但有了样本点这一概念，有些事情可以表述准确而清楚. 例如我们可以在例 1 中定义随机游动的 首达时

$$\tau_m(\omega)=\min\{n,S_n(\omega)=m\};$$

事件 $\{\omega;S_n(\omega)=m,S_1(\omega)<m,S_2(\omega)<m,\cdots,S_{n-1}(\omega)<m\}$ 可以改写为 $\{\omega;\tau_m(\omega)=n\}$. 一般我们可以取任意集合 A 来定义随机游动的首达时

$$\tau_A(\omega)=\min\{n,S_n(\omega)\in A\}.$$

若集合 A 为单点集 $\{m\}$, 则 $\tau_{\{m\}}$ 简写为 τ_m.

命题 1. 对于简单随机游动， $P_0(\omega,\tau_1(\omega)<\infty)=1$, $E_0\tau_1=\infty$.

其中下标 0 是为了强调 $S_0=0$. 因为 $P_0(\tau_1(\omega)=2k)=0$, $P_0(\tau_1(\omega)=2k-1)$ 也是可以计算的，但直接验证命题 1 仍有难度，容后补证. 命题 1 的概率意义是很清楚的. 从原点出发的随机游动迟早要到达 1, 但平均所用的时间为无穷大.

例 3. 随机游动相遇问题. 设随机变量 $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\xi_3,\eta_3,\cdots,\xi_n,\eta_n,\cdots$ 独立同分布， $P(\xi_1=1)=P(\xi_1=-1)=1/2$,

$$X_n=2+\xi_1+\xi_2+\xi_3+\cdots+\xi_n,\quad Y_n=\eta_1+\eta_2\cdots\eta_n.$$

称 $\tau=\min\{n,X_n=Y_n\}$ 为两个随机游动的相遇时. 若取 $\zeta_k=(\xi_k-\eta_k)/2$, 则

$$P(\zeta_1=1)=P(\zeta_1=-1)=1/4,\quad P(\zeta_1=0)=1/2;$$

且

$$Z_n = (X_n - Y_n)/2 = 1 + \zeta_1 + \zeta_2 \cdots \zeta_n.$$

两个随机游动 X 和 Y 的相遇时成了随机游动 Z 首达原点的时刻. 随机游动 $\{Z_n\}$ 很像简单随机游动，只是以 $1/2$ 的概率停滞不动，用大数定律的观点来看，它就是简单随机游动，只是时间变慢了，因此也称为带时滞的简单随机游动，命题 1 的结论可以移植过来，两个随机游动一定相遇，但相遇时的平均值为无穷大.

这个例子的一种解释是 *警察抓小偷*. 假设小偷按 X 做随机游动，警察按 Y 做随机游动，则警察一定能逮住小偷，但平均时间为无穷大. 如果初始时在原点有 N 个警察，各个警察相互独立地做简单随机游动 $Y^{(k)}$ ， $1 \le k \le N$, 定义

$$\tau_N = \min\{n, X_n = \max_{1\le k\le N} Y_n^{(k)}\}.$$

显然警察越多能越早抓住小偷，即 $\tau_{N+1} \le \tau_N$. 问题是需要多少个警察才能保证在有限时间逮住小偷？试求最小的 N 使得 $E\tau_N < \infty$.

例 4. *赌徒破产问题* 假设某赌徒初始时有赌资 m 元，每次押注一元钱，输赢的机会各半. 则可用随机游动 $Y_n = m + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \cdots + \xi_n = m + S_n$ 来表示经过 n 次赌博后该赌徒手里的赌资. 其中 $\{S_n\}$ 是初值为 0 的简单随机游动. 定义赌徒破产的时刻为

$$\tau_0(\omega) = \min\{n, Y_n(\omega) \le 0\}.$$

我们关心的是该赌徒恰好在 n 时刻全输光的概率，即

$$\begin{aligned}
& P(Y_n = 0, Y_1 > 0, Y_2 > 0, \cdots, Y_{n-1} > 0) \\
= \ & P(S_n = -m, S_1 > -m, S_2 > -m, \cdots, S_{n-1} > -m) \\
= \ & P(S_n = m, S_1 < m, S_2 < m, \cdots, S_{n-1} < m).
\end{aligned}$$

问题转化为例 1 的结论. 根据命题 1, 该赌徒将在有限时间内输掉全部赌资，但所需时间的平均值为无穷大.

把模型略作修改, 若赌徒输掉全部赌资或手里的赌资达到或超过 M 即告停, 则停止赌博的时刻为 $\tau_A(\omega) = \min\{n, S_n(\omega) \in A\}$, 其中 $A = (-\infty, 0] \cup [M, \infty)$. 则 $E_0\tau = E_M\tau$ $= 0$,

$$E_m\tau = 1 + \frac{1}{2}E_{m+1}\tau + \frac{1}{2}E_{m-1}, \quad 1 \le x \le M-1.$$

解得 $E_m\tau = m(M-m)$. 同样办法可以证明 $P_m(S_\tau = M) = 1 - P_m(S_\tau = 0) = m/M$. 这个结论说明赌博不会无限进行下去，而且相当“公平”，初始赌资越大越能“完胜”.

首达时 τ_A 具有这样的性质： τ 只取非负整数， $\tau(\omega) = n$ 成立与否只取决于 $S_0(\omega)$, $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$, $\cdots, \xi_n(\omega)$, 换言之，事件 $\{\tau \le n\}$ 发生与否只取决于 $S_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$.

Wald **引理**: 假设 $E\tau_A < \infty$, $S_0 = 0$, $E|\xi| < \infty$, 则 $ES_\tau = E\tau E\xi$.

证明：根据定义，事件 $\{\tau \geq n\}$ 是 $\{\tau \leq n-1\}$ 的余集，而后者发生与否只取决于 $S_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}$, 与 ξ_n 相互独立.

$$\begin{aligned} ES_\tau &= E\sum_{k=1}^{\tau}\xi_k = E\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k 1_{\{\tau\geq k\}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k E1_{\{\tau\geq k\}} \\ &= E\xi\sum_{k=1}^{\infty}P(\tau\geq k) = E\xi E\tau. \end{aligned}$$

Wald **第二引理**: 假设 $E\tau_A < \infty$, $S_0 = 0$, $E\xi = 0, E\xi^2 < \infty$, 则 $ES_\tau^2 = E\tau E\xi^2$.

例 5. 赌徒停止赌博. 做适当平移，赌徒停止赌博的时间等于初值为 0 的简单随机游动首中 $\{-m, M-m\}$ 的时间. 令 $\tau = \min\{n; S_n = -m \text{ 或 } M-m\}$. 根据 Wald 引理

$$0 = ES_\tau = -mP(S_\tau = -m) + (M-m)P(S_\tau = M-m).$$

又因为 $P(S_\tau = -m) + P(S_\tau = M-m) = 1$(习题 5), 可解得

$$P_0(S_\tau = M-m) = 1 - P_0(S_\tau = -m) = m/M;$$

再利用 Wald 第二引理以及 $E\xi^2 = 1$,

$$E\tau = ES_\tau^2 = m^2P(S_\tau = -m) + (M-m)^2P(S_\tau = M-m) = m(M-m).$$

由此推出 $P_m(S_\tau = M) = 1 - P(S_\tau = 0) = m/M$, $E_m\tau = m(M-m)$. 我们已用不同的方法得到过这个结论，两种方法都应掌握.

3 随机游动

由于技术原因，在前一节中随机变量 ξ 只取整数值. 然而随机游动定义本身并没有排斥连续型随机变量，只是我们的手段还不够. 有些模型并不符合定义，但通过适当变换，还是可以看出随机游动的结构来.

例 6. 设 Y_n 是第 n 天的某股票的价格， $Y_n = \xi_n Y_{n-1}$. 其中 ξ_n 为独立同分布随机变量，这样写为乘法是有道理的，取对数后就是随机游动.

我们可以推广随机游动的定义. 在随机游动的定义中，若以随机向量代替随机变量，就得到高维随机游动. 1905 年 Karl Pearson 在 Nature 杂志上发表文章， The problem of random walker, 首次用了随机游动这一名称，考虑的正是二维随机游动. 当然，随机游动的某些特性早已被人们研究过了. Lord Rayleigh 在 1880 年和 1889 年发表的文章就解答了 Pearson 的问题.

例 7. d 维简单随机游动. 设 $\{\mathbf{e}_i, 1 \le i \le d\}$ 为 d 维欧氏空间的一组标准正交基. $P(\xi = \mathbf{e}_i) = P(\xi = -\mathbf{e}_i) = 1/2d$. $S_n = \xi_1 + \xi_2 \cdots + \xi_n$. 称 $\{S_n\}$ 为 d维简单随机游动.

命题 2 对于 d 维简单随机游动, $P(S_{2n} = \mathbf{0}) \approx cn^{-d/2}$.

由此可以看出, 对于 1 维或 2 维简单随机游动, $\sum_n P(S_n = \mathbf{0}) = \infty$; 对于 3 维或更高维简单随机游动, $\sum_n P(S_n = \mathbf{0}) < \infty$. 我们将在后面章节看到这一不等式的概率意义. 称 $G(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \sum_n P_0(S_n = \mathbf{x})$ 为随机游动的格林函数. 它与分析学, 尤其是势论, 有密切联系.

我们还可以把随机游动的定义推广到群上. 设 G 是一群, $\{\xi_i; i = 1, 2, \cdots\}$ 是一族取值于 G 的独立同分布的随机元, 令 $S_n(\omega) = \xi_1(\omega)\xi_2(\omega)\cdots\xi_n(\omega)$. 称 $\{S_n\}$ 为群 G 上的随机游动. 由于通常 G 是不可交换的, 要区分左乘和右乘, 这里定义用的是右乘.

例 8. 规则树上的简单随机游动. 设 G 是由 $\{e_1, e_1^{-1}, e_2, e_2^{-1}, \cdots, e_d, e_d^{-1}\}$ 生成的自由群, 对应的 Cayley 图是一规则树. 为简单计, 假设这些生成元各不相同, $P(\xi = e_i) = P(\xi = e_i^{-1}) = 1/2d$. 称 $\{S_n\}$ 为 规则树上的简单随机游动.

阅读文献

Elliott W. Montroll &Michael Shlesinger, *On the wonderful world of random walk*, in “From stochastic to hydrodynamics”, J. L. Lebowitz & E. W. Montroll, editors, North-Holland Physiscs Publishing, 1984

参考文献

Frank Spitzer, *Principles of Random Walk*, 2nd Edition, GTM34, Springer, New York, 1976

Wolfgang Woess, *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000

习题：

1. 举五个日常生活中随机过程的例子.

2. 试将例 2 和例 4 推广至紧邻随机游动.

3. 证明 $E_0\tau_1 = \infty$(即命题 1 的第二部分).

4. 设 $\{S_n\}$ 为简单随机游动, 初值为 0. 证明

$$P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = \frac{u_n}{2n-1},$$

$$P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0) = u_n.$$

5. $\{S_n\}$ 同上题. 设 a 和 b 为正整数, 令 $\tau = \min\{n; S_n = -a \text{ 或 } b\}$. 证明 $P(S_\tau = -a) + P(S_\tau = b) = 1$.

6. 试就 $d = 2, 3$ 情形证明命题 2.

7. 试证 Wald 第二引理