Q- 过程

应用随机过程补充讲义之三

1 Poisson 过程

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 相互独立，均服从参数为 λ 的指数分布，令 $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$,

$$X_t = \max_n \{n; S_n \le t\}.$$

则 $\{X_t; t \ge 0\}$ 是取值非负整数的连续时间参数的随机过程，称为参数为 λ 的 Poisson 过程. 如无特别声明，可设参数 λ=1.

命题 1 X_t 服从参数为 λt 的 Poisson 分布.

证明. 注意到 $\{X_t = n\}$ 等价于 $\{S_n \le t < S_{n+1}\}$. 取 $D = \{(x_1, \cdots, x_n); \sum_{j=1}^n x_j \le t\} \subset R^n$. $C = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}); \sum_{j=1}^n x_j \le t < \sum_{j=1}^{n+1} x_j;\} \subset R^{n+1}$. 则

$$\begin{aligned}
& P(X_t = n) = P(S_n \le t < S_{n+1}) \\
= & \int \cdots \int_C \lambda^{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1}} dx_1 \cdots dx_{n+1} \\
= & \int \cdots \int_D \lambda^n e^{-\lambda t} dx_1 \cdots dx_n \\
= & \lambda^n e^{-\lambda t} \ \text{Volume}(D) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

指数分布有一性质，称为无记忆性，对任何 $a, b > 0$,

$$P(\xi > a + b | \xi > a) = P(\xi > b).$$

由此可推出 Poisson 过程的马氏性.

命题 2. 对任何正数 $t_1 < t_2 < \cdots < t_r < t < t + s$, 对任意非负整数 $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_r \le n \le n + m$,

$$\begin{aligned}
& P(X_{t+s} = n + m | X_t = n, X_{t_1} = n_1, \cdots, X_{t_r} = n_r) \\
= & P(X_{t+s} = n + m | X_t = n) = P(X_s = m)
\end{aligned}$$

证明. 注意到 $\{X_t=n\}$ 等价于 $\{S_n\le t<S_{n+1}\}$.

$$\begin{aligned}
& P(X_{t+s}=m|X_t=n,X_{t_1}=n_1,\cdots,X_{t_r}=n_r)\\
= & \frac{P(X_{t+s}=n+m,X_t=n,X_{t_1}=n_1,\cdots,X_{t_r}=n_r)}{P(X_t=n,X_{t_1}=n_1,\cdots,X_{t_r}=n_r)}\\
= & \frac{P(S_{n+m}\le t+s<S_{n+m+1};S_n\le t<S_{n+1},S_{n_i}\le t_i<S_{n_i+1},1\le i\le r)}{P(S_n\le t<S_{n+1},S_{n_i}\le t_i<S_{n_i+1},1\le i\le r)}\\
= & \frac{\int\cdots\int_B \lambda^n e^{-\sum_{j=1}^n x_j}\left(\int\cdots\int_A \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=n+1}^{n+m+1}x_i}dx_{n+1}\cdots dx_{n+m+1}\right)dx_1\cdots dx_n}{\int\cdots\int_B \lambda^n e^{-\lambda t}dx_1\cdots dx_n}
\end{aligned}$$

其中 $a=t-\sum_{j=}^n x_j$,

$B=\{(x_1,\cdots,x_n);\sum_{j=1}^{n_i}x_j\le t_i<\sum_{j=1}^{n_i+1}x_j;\sum_{j=1}^n x_j\le t\}\subset R^n$,

$$A=\{(x_{n+1},\cdots,x_{n+m+1});x_{n+1}>a;\sum_{j=n+1}^{n+m}x_j\le s+a\le\sum_{j=n+1}^{n+m+1}x_j;\}\subset R^{m+1}.$$

$$\begin{aligned}
& \int\cdots\int_A \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=n+1}^{n+m+1}x_i}dx_{n+1}\cdots dx_{n+m+1}\\
= & P(\xi_{n+1}>a;\sum_{j=n+1}^{n+m}\xi_j\le s+a\le\sum_{j=n+1}^{n+m+1}\xi_j)\\
= & P(\xi_{n+1}>a)P(\sum_{j=n+1}^{n+m}\xi_j\le s\le\sum_{j=n+1}^{n+m+1}\xi_j)\\
= & e^{-\lambda(t-\sum_{j=}^n x_j)}P(\sum_{j=n+1}^{n+m}\xi_j\le s\le\sum_{j=n+1}^{n+m+1}\xi_j).
\end{aligned}$$

将此代入前面的分式中，简化后即得

$$P(X_{t+s}=m|X_t=n,X_{t_1}=n_1,\cdots,X_{t_r}=n_r)=P(\sum_{j=n+1}^{n+m}\xi_j\le s\le\sum_{j=n+1}^{n+m+1}\xi_j).$$

同理可得

$$P(X_{t+s}=m|X_t=n)=P(\sum_{j=n+1}^{n+m}\xi_j\le s\le\sum_{j=n+1}^{n+m+1}\xi_j).$$

于是第一个等号成立．再利用同分布可得时齐性

$$P(X_{t+s}=n+m|X_t=n)=P(\sum_{j=n+1}^{n+m}\xi_j\le s\le\sum_{j=n+1}^{n+m+1}\xi_j)$$

$$=P(\sum_{j=1}^{m}\xi_j\le s\le\sum_{j=1}^{m+1}\xi_j)=P(X_s=m).$$

证毕

命题 3. 假设 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是两个相互独立的 Poisson 过程，参数分别是 λ 和 μ, 令 $Z_t=X_t+Y_t$, 则 $\{Z_t\}$ 也是 Poisson 过程，参数为 $\lambda+\mu$.

命题 4. 设 $\{X_t\}$ 是 Poisson 过程，参数是 λ, 设 $\{\eta_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布的随机变量序列，并与 $\{X_t\}$ 相互独立． $P(\eta=1)=p$, $P(\eta=0)=1-p$. 令 $Z_t=\sum_{n=1}^{X_t}\eta_n$, 则 $\{Z_t\}$ 也是 Poisson 过程，参数为 $p\lambda$.

如果在命题 4 中把 Bernoulli 型随机变量换为一般的随机变量，所得 $\{Z_t\}$ 称为复合 Poisson 过程.

固定 ω, $X_t(\omega)$ 是 t 的单调上升阶梯函数，具有左连续性和右极限． X_t 表示到时刻 t 为止某类事件发生的累计次数，是一个整数型随机变量；而 S_n 是该类事件第 n 次发生的时刻，是一个连续型随机变量． $\{X_t;t\ge 0\}$ 与 $\{S_n,n=1,2,\cdots\}$ 一一对应．我们称 $\{S_n,n=1,2,\cdots\}$ 为 Poisson 流.

Poisson 流是 R^+ 上的随机点集，对任意 $A\subset R^+$ 定义

$$\chi(A)=|A\cap\{S_n,n=1,2,\cdots\}|.$$

则 (1)$\chi(A)$ 服从 Poisson 分布，参数为 $\lambda|A|$;

(2) 若 $A\cap B=\emptyset$, 则 $\chi(A)$ 与 $\chi(B)$ 相互独立.

反之，如果 R^+ 上的随机点集 $\tilde{S}$, 满足以上两点要求，则 $\tilde{S}$ 是 Poisson 流．不难根据这两点来把 Poisson 流延拓到整条直线 R 上，也可定义在高维欧氏空间 R^d 上，称为高维 Poisson 过程 (流)．例如，夜空里某一等级的星星可以看成是二维球面上的 Poisson 过程，北大勺海里的荷花也呈 Poisson 过程.

2 Q- 过程

在这一章我们总假定状态空间 S 是有限或可数的．设 $\{X_t,t\ge 0\}$ 是取值于 S 的连续时间参数的随机过程．如果对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\in S$, $t_1<t_2<\cdots<t_k<t_{k+1}$,

$$P(X_{t_{k+1}}=x_{k+1}|X_{t_0}=x_0,X_{t_1}=x_1,\cdots X_{t_k}=x_k)=P(X_{t_{k+1}}=x_{k+1}|X_{t_k}=x_k); \tag{1}$$

对任意 $t, s > 0$, $x, y \in S$

$$P(X_{t+s} = y | X_t = x) = P(X_s = y | X_0 = x) \tag{2}$$

则称 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为取值离散状态空间的马尔可夫过程，简称 马氏过程.

这里 过程 两字隐喻时间参数是连续的. 称 (1) 式为 马尔可夫性质, 简称 马氏性; 称 (2) 式为 时齐性. 从从字面上讲, 取值离散状态空间的马尔可夫过程并不包含 (2) 式, 但人们往往以 非时齐马氏过程 来强调 (2) 式的缺失.

称 $P(X_s = y | X_0 = x)$ 为转移概率，记为 $p_s(x, y)$ 或 $p_{xy}(s)$. 约定 $p_{xy}(0) = \delta_{xy}$. 以 P_t 代表转移概率全体 $\{p_t(x, y); x, y \in S\}$, 称为转移概率矩阵. 当 S 是有限时， P_t 也表示相应的矩阵，当不会引起歧义. 转移概率满足 Chapman-Kolmogorv 方程,

$$\sum_{z \in S} p_t(x, z) p_s(z, y) = p_{t+s}(x, y). \tag{3}$$

例： Poisson 过程是取值离散状态空间的马尔可夫过程.

但满足 (3) 的转移概率矩阵族 $\{P_t, t \geq 0\}$ 非常多也非常复杂，因此我们进一步假设

$$\lim_{t \to 0} p_{xy}(t) = \delta_{xy}, \quad \forall x, y \in S. \tag{4}$$

上式称为 连续性, 蕴含更强的可微性.

命题 3. 若 (4) 式成立，则

$$q_{xy} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{xy}(t) - \delta_{xy}}{t}$$

存在 (允许极限为 ∞ 的广义意义下).

显然 $q_{xx} \leq 0 \leq q_{xy}, x \neq y$. 令 $q_x = -q_{xx}$. 称 $\{q_{xy}, x, y \in S\}$ 全体为 $\{P_t, t \geq 0\}$ 的 Q- 矩阵. 当 S 是有限状态空间时， Q- 矩阵的确可以写成矩阵形式 (q_{xy}).

命题 4. 假设

$$\sum_{y \neq x} q_{xy} = q_x < \infty. \tag{5}$$

设 $X_0 = x$, 令 $\sigma = \inf\{t, X_t \neq x\}$, 则

1) $P(\sigma > t) = e^{-q_x t}$.

2) $P(X_\sigma = y) = q_{xy}/q_x$.

3) $P(\sigma < t, X_\sigma = y) = (1 - e^{-q_x t}) q_{xy}/q_x$.

命题 5. (1) 当 S 是有限状态空间时，则 (5) 式恒成立且

$$P_t = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n. \tag{6}$$

(2) 反之, 若矩阵 Q 满足 (5) 式, 则矩阵 e^{tQ} 是随机矩阵而且满足 Chapman-Kolmogorv 方程. 以 e^{tQ} 为转移阵所对应的随机过程具有马氏性.

当 S 是有限状态空间时，一族转移阵 $\{P_t, t \geq 0\}$ 可由单个矩阵 Q 所确定，而 Q 只需满足 (5) 式即可. 当 S 是无限时，情况要复杂的多.

例. 设 $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $q_n = q_{n,n+1} = n^2$, 其他 $q_{nm} = 0$. 如果 $\{X_t\}$ 是对应的马氏过程，由命题 4 知， X_t 从某点 k 出发，依次访问 $k+1$, $k+2$, $k+3$, $\cdots$. 令 $\sigma_n = \inf\{t, X_t \neq n\}$, 则

$$E\sum_{n=k}^{\infty}\sigma_n = \sum_n E\sigma_n = \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty.$$

$\sum_{n=k}^{\infty}\sigma_n$ 几乎处处有限， X_t 将在有限时间内遍访所有状态. 这种现象称为爆炸， $s = \sum_{n=k}^{\infty}\sigma_n$ 称为爆炸时， $\{X_t; t \geq s\}$ 如何定义？这是一个困难的问题. 一种解决办法是假设 q_x 一致有界，爆炸不会出现.

命题 6. 设 $\{q_{xy}, x, y \in S\}$ 满足

$$\sum_{y \neq x} q_{xy} = q_x < M, \quad \forall x \in S$$

则存在取值离散状态空间的马尔可夫过程，以 $\{q_{xy}, x, y \in S\}$ 为其 Q 矩阵.

我们把 Q 矩阵所确定的取值于离散状态空间的马尔可夫过程叫做 Q- 过程，也叫跳过程. Q- 过程容易描述，性质也清楚. 常见的离散状态空间的马尔可夫过程是 Q- 过程，但也存在反例. 另一方面，并不是任何一族 $\{q_{xy}, x, y \in S\}$ 都对应一个 Q- 过程，命题 6 只给出了充分条件，有些问题至今也没完整的答案.

Kolmogorov 前进方程和后退方程

$$P'_{xy}(t) = \sum_u P_{xu}(t)q_{uy}. \tag{7}$$

$$P'_{xy}(t) = \sum_u q_{xu}P_{uy}(t). \tag{8}$$

Q- 过程与马氏链的联系. 取 $\delta > 0$, $Y_n = X_{n\delta}$, 则 $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是马氏链，以 P_δ 为一步转移概率阵，称为骨架过程. 设 $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = \inf\{t, X_t \neq X_0\}$, $\sigma_{n+1} = \inf\{t > \sigma_n, X_t \neq X_{\sigma_n}\}$, $Z_n = X_{\sigma_n}$. 则 $\{Z_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 也是马氏链，其一步转移概率 $p_{xx} = 0, p_{xy} = q_{xy}/q_x$, 称为嵌入链. 常返与非常返，我们称 $\{X_t\}$ 是常返的 (非常返的) 当且仅当其嵌入链是常返的 (非常返的).

设 $\{X_t\}$ 是离散状态空间的马尔可夫过程，其转移概率为 $\{p_t(x, y); x, y \in S, t > 0\}$. 如果 μ 是状态空间 S 上的概率分布，如果对任何 $t > 0, y \in S$, $\sum_{x\in S}\mu_x p_t(x, y) = \mu_y$, 则称 μ 为 *不变分布* 或 *平稳分布*. 如果对任何 $t > 0, x, y \in S$, $\mu_x p_t(x, y) = \mu_y p_t(y, x)$, 则称 μ 为 *可逆分布*.

如果 $\{X_t\}$ 是 Q- 过程， μ 是 不变分布 当且仅当 $\sum_{x\in S}\mu_x q_{xy}=0$; μ 是 可逆分布 当且仅当 $\mu_x q_{xy}=\mu_y q_{yx}$.

设 $\{X_t\}$ 是 Q- 过程而 μ 是 可逆分布, 取

$$L_2(\mu)=\{f:S\to R,\sum_x \mu_x(f(x))^2<\infty\}.$$

对任意 $f\in L_2(\mu)$, 定义 $\int fd\mu=\sum_x\mu_x f(x)$, $||f||^2=\int f^2d\mu$. 设 ν 是状态空间 S 上另一概率分布，我们来考察 νP_t 与 μ 的距离. 只要考察 ν 是单点分布 δ_x 即可，一般情形 $\nu=\sum_x\nu_x\delta_x$. 如果 $\delta_xP_t\to\mu$, 则

$$E_xf(X_t)=\sum_y f(y)P(X_t=y|X_0=x)=\int fd(\delta_xP_t)\to\int fd\mu.$$

为此考察 $A(t)=||E_xf(X_t)-\int fd\mu||^2$;

$$\begin{aligned}\frac{dA_t}{dt} &= \sum_x 2\mu_x\left(E_xf(X_t)-\int fd\mu\right)\sum_y f(y)P'_{xy}(t)\\ &= \sum_x 2\mu_x\left(E_xf(X_t)-\int fd\mu\right)\sum_y f(y)\sum_u q_{xu}P_{uy}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_x 2\mu_x\left(E_xf(X_t)-\int fd\mu\right)\sum_u q_{xu}E_uf(X_t)\\ &= 2\sum_x\sum_u \mu_xq_{xu}E_xf(X_t)E_uf(X_t)\\ &= 2\sum_x\sum_{u\neq x}\mu_xq_{xu}E_xf(X_t)E_uf(X_t)-2\sum_x\mu_x\sum_{u\neq x}q_{xu}(E_xf(X_t))^2\\ &= -2\sum_x\sum_u\mu_xq_{xu}[E_xf(X_t)-E_uf(X_t)]^2\end{aligned}$$

不妨设 $\int fd\mu=0$, 否则以 $f-\int fd\mu=0$ 代替. 记

$$\Delta=\inf\{\sum_x\sum_u\mu_xq_{xu}[f(x)-f(u)]^2;\quad f\in L_2(\mu),||f||\le 1,\int fd\mu=0\}.$$

则

$$\frac{d}{dt}||P_tf||^2=-2\sum_x\sum_u\mu_xq_{xu}[\frac{P_tf(x)}{||P_tf||}-\frac{P_tf(u)}{||P_tf||}]^2||P_tf||^2\le -2\Delta||P_tf||^2.$$

由此推出 $||P_tf||\le e^{-\Delta t}||f||$. 故此称 Δ 为谱 (缝) 隙.

3 实例

生灭过程．取 $S=\{0,1,2,\cdots\}$, $q_{j,j-1}=\alpha_j, j\ge 1$; $q_{j,j+1}=\beta_j, j\ge 0$, $-q_{00}=\beta_0$; $-q_{jj}=\alpha_j+\beta_j$, $\forall j\ge 1$, 对应的 Q- 过程称为生灭过程．如果 $\alpha_j=0, j\ge 1$, 则称为纯生过程． Poisson 过程就是纯生过程．

生灭过程是最简单的一类跳过程．其嵌入链是半直线上的紧邻随机游动．生灭过程一定是可配称的，配称分布可取为

$$a(x)=\frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{x-1}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_x}.$$

若 $\sum_x a(x)<\infty$, 则该生灭过程还是可逆的．生灭过程是否常返，可由生灭速率 α_j,β_j 所确定；其谱隙也可用生灭速率来表达．其他一些复杂模型可以通过于生灭过程的比较而得到一些有用的估计．

M/M/k 排队系统．假设某服务点有 k 个服务员，顾客的到来是速率为 β 的 Poisson 流，每个顾客接受服务的时间是独立同分布的，服从参数为 α 的指数分布，以 X_t 表示 t 时刻正在接受服务和正在等待服务的顾客总数，则 $\{X_t; t\ge 0\}$ 是生灭过程，参数为

$$\beta_j=\beta, j\ge 0;\quad \alpha_j=\alpha\max(k,j), j\ge 1.$$

接触过程．取 S 为一维格点 Z 的有限子集全体．

$$q(A, A\setminus\{x\})=1,\quad x\in A;$$

$$q(A, A\cup\{x\})=\lambda|A\cap\{x-1,x+1\}|,\quad x\notin A;$$

其中 $|B|$ 表示集合 B 中的元素的个数，而 $A\cap\{x-1,x+1\}$ 表示 A 中与 x 相邻的元素．这个模型可以做这样的解释， X_t 表示 t 时刻受患某种传染病的患者全体，每个患者以速率 1 得以康复，每个健康的个体受感染的速率与其周围邻居中患者数目成正比．模型由此得名．

Harris 的图构造．在 Z 上每个整数点画一直线，在每条直线上画上三个独立 Poisson 流的到达时刻，分别以 $\leftarrow, \rightarrow, \times$ 表示，前两个 Poisson 流的参数为 λ, 第三个 Poisson 流的参数为 1．不同直线上的 Poisson 流相互独立．设想在 $(x,0)$ 点注水，水可沿直线往上流，也可按箭头流到左边或右边的直线，但不可穿越 $\times$．如果水流可到达 (y,t), 则以 $(x,0)\longrightarrow(y,t)$ 表示．

$$X_t=\{y\in Z;\ \ \exists x\in X_0, (x,0)\longrightarrow(y,t)\}.$$

由图表示可知，接触过程具有单调性， X_0 越大，则 X_t 也越大； λ 越大，则 X_t 也越大．按定义，空集是吸收态，一旦没有患者，传染病就消失了，即 $X_t=\emptyset\Rightarrow X_{t+s}=\emptyset$．令 $\tau=\inf\{t; X_t=\emptyset\}$．为简单计，我们假设 $X_0=\{0\}$．我们关心的问题是 $P(\tau<\infty)$ 与 λ 之间的关系．由单调性，定义临界值

$$\lambda_c=\sup\{\lambda;\quad P(\tau<\infty)=1\}.$$

这意味着传染率较低时，传染病迟早会消失；如果传染率较大，则传染病会一直感染下去．这种因为某个参数的量变引起整体范围的质变的现象称为相变．已知 $1.5 < \lambda_c < 2$, 但未能找出 λ_c 的精确值．

接触过程定义极其简单，却具有丰富而深刻的性质；例如，令 $r_t = \max\{x, (0,0) \longrightarrow (x,t)\}$. 当 $\lambda > \lambda_c$ 而 $\tau = \infty$ 时，$\lim_t r_t/t$ 存在．

Harris 的图构造办法可以移植到其他图上，就是在 Z 上也并没有限制初始 X_0 必须为有限的．如果 X_0 是无限集，则 X_t 也一定是无限集．但 Z 的所有无限子集全体实不可数的，这已超出本章所讨论的范围．

注记：更新过程和点过程

阅读文献

参考文献

习题： 1. 证明 $X_{t+s} - X_s$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布．

2. 写出非时齐马氏过程的 Chapman-Kolmogorov 公式．

3. 设 $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $q_n = q_{n,n+1} = n$, 其他 $q_{nm} = 0$. 证明：存在相应的 Q- 过程．

4. 通过与生灭过程的比较，证明接触过程度的临界值 $\lambda_c \geq 1$. $\lim_t r_t/t \leq \lambda - 1$

6. 考虑只有两个状态 $\{0,1\}$ 的生灭过程， $q_{01} = -q_{00} = \lambda$, $q_{10} = -q_{11} = \mu$, 写出 Kolmogorov 向前公式，并通过解此微分方程组求得 $p_{00}(t)$ 和 $p_{11}(t)$ 以及平稳分布．

7. (a) 考察 Q- 过程 $\{X_t\}$ 及其嵌入链 $\{\xi_n\}$, 已知 $\{\xi_n\}$ 是正常返的，问 $\{X_t\}$ 也一定是正常返的吗？ (b) 若把 $M/M/1$ 排队系统改 First-come-first-served 为 Last-come-first-served. 请指出该排队系统的下列随机变量的分布有无变化： (1) 队伍长度， (2) 等候时间， (3) 有人在等候排队．

8. 考虑 $\{1, 2, \cdots, N\}$ 上的 Q - 过程，其转移概率阵 $P(t) = (p_{ij}(t))$. 证明对所有 $t > 0$, $det(P(t)) > 0$.

9. 在排队系统 $M/M/1$ 中顾客的到达时刻是 Poisson 流，参数为 λ; 服务时间服从指数分布，参数为 μ. 当队伍长度为 n 时新来的顾客以概率 $\frac{n+1}{n+2}$ 加入到等候的队伍，以概率 $\frac{1}{n+2}$ 放弃。试问 (1) 在什么条件下该系统可以有平稳分布？ (2) 当该排队系统达到平稳时平均队伍长度是多少？顾客加入等候队列的概率是多少？

10. 某房产公司在其主页上发布楼房信息，发布时刻构成 Poisson 流，平均每天 λ 条信息．每条信息的房价在 80 万到 200 万之间均匀分布，某先生为购房最多能出价 100 万，因此只研读与他有关的信息．研读每条信息所花时间也是随机变量，在 1 小时到 2 小时之间均匀分布．记他 30 天上网查阅的累计时间为 X, 试求 $E\exp(aX)$, 其中 a 为常数