平稳过程

应用随机过程补充讲义之五

1 二阶矩过程

设 $\{X_t\}$ 是随机过程，这里时间参数 t 既可以是整数，也可以是实数．如果对任何 $t>0$, $EX_t^2<\infty$, 则称 $\{X_t\}$ 为二阶矩过程.

显然高斯过程是二阶矩过程．所有具有二阶矩的随机变量全体构成一个内积空间．定义两个随机变量的内积为它们的协方差．对于二阶矩过程，最主要的两个数字特征为 $m(t)=EX_t$ 和

$$\Gamma(t,s)=Cov(X_t,X_s)=E(X_t-m_t)\overline{(X_s-m_s)}.$$

我们不妨设 $m(t)\equiv 0$. 而协方差函数 $\Gamma(t,s)$ 是一定存在的，共轭的 $\Gamma(s,t)=\overline{\Gamma(t,s)}$, 非负定的.

命题 1. 对任何正整数 n, 任意复数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 和任意正数 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$,

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_i\bar{c_j}\Gamma(t_i,t_j)\ge 0.$$

证明.

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_i\bar{c_j}\Gamma(t_i,t_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_i\bar{c_j}Cov(X_{t_i},X_{t_j})=\mathrm{var}(\sum_{i=1}^n c_iX_{t_i})\ge 0.$$

命题 2. 假设二元函数 $\Gamma(t,s)$ 是非负定的，则一定存在二阶矩过程以 $\Gamma(t,s)$ 为协方差函数.

证明. 其实可以取高斯过程. ♣.

设 $\{X_t\}$ 为二阶矩过程．如果 EX_t 是常数 (与 t 无关), $\Gamma(t,s)$=$\Gamma(t+r,s+r)$, 则称 $\{X_t\}$ 为宽平稳过程.

命题 3. 设 $\{X_n\}$ 为宽平稳过程 (序列). 如果 $\lim_{n\to\infty}\Gamma(0,n)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}||\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n-EX_1||=0.$$

证明.

$$lim_{n\to\infty}||\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n-EX_1||=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\Gamma(0,k)=0.\quad ♣$$

2 遍历定理

设 $\{X_t\}$ 是随机过程, 这里时间参数 t 既可以是整数, 也可以是实数. 如果对任何正整数 n, 任意正数 s 和 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots X_{t_n}\}$ 和 $\{X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \cdots X_{s+t_n}\}$ 具有相同的联合分布，则称 $\{X_t\}$ 为 (严) 平稳过程.

例 1: 独立同分布序列.

例 2. $X_n = X$, 则 $\{X_n\}$ 是严平稳过程

例 3. OU 过程

我们不能望文生义. 显然存在随机过程 $\{X_t\}$, 它是严平稳过程而非宽平稳过程，也可以是宽平稳过程而非严平稳过程.

严平稳序列独立同分布序列的推广. 我们希望有类似大数定律这样的结论. 为了保证 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n$ 收敛到常数，需要所谓的遍历性条件. （考虑例 2 这极端情形.）但是遍历性的准确叙述稍嫌麻烦，我们不准备仔细阐述，但以下几个结论可以使我们使用这一概念.

命题 2. (混合性条件). 如果 $\lim_{t\to\infty} |EX_tX_0 - EX_0EX_t| = 0$, 则 $\{X_n\}$ 是遍历的.

例如，独立序列满足混合性条件. 但例 2 不满足混合性条件.

命题 3. 假设 $\{X_n\}$ 是平稳遍历的， $Y_n = f(X_n, X_{n+1}, X_{n-2}, X_{n+2}, X_{n-2}, \cdots)$ 则 $\{Y_n\}$ 是也是平稳遍历的.

例 3, 假设 $\{S_n\}$ 是 Z^d 上的随机游动. 如果存在 $m \ge 1$, $S_{n+m} = S_n$, 取 $Y_n = 0$; 如果对任何 $m \ge 1$, $S_{n+m} \ne S_n$, 取 $Y_n = 1$. 则 $\{Y_n\}$ 构成一平稳序列.

命题 4. (遍历收敛定理). 假设 $\{X_n\}$ 是平稳遍历的，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n = EX_1 \quad a.s..$$

例 3(续). 设 $\{S_n\}$ 是 Z^d 上的随机游动. R_n 是 $\{S_0, S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 中的元素个数，称为 range of the random walk. 显然 $R_n \le n+1$. 上个世纪六十年代人们研究 R_n/n 的收敛性.

命题 5. $\lim_n \frac{R_n}{n} = P(S_n \ne S_0, n \ge 1)$ $a.s.$

证明. 记 $\rho = P(S_n \ne S_0, n \ge 1)$. 显然 $R_n \ge 1 + Y_1 + Y_2 + \cdots, Y_n$, 所以

$$\liminf_n \frac{R_n}{n} \ge= \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = EY_1 = \rho.$$

另一方面, 取定 k, 如果存在 m $1 \le m \le k$, $S_{n+m} = S_n$, 取 $Z_n^k = 0$; 如果对任何 $m \le k$, $S_{n+m} \ne S_n$, 取 $Z_n^k = 1$. 则 $\{Z_n^k\}$ 也构成一平稳序列，而且 $R_n \le k + \sum_{l=0}^{n-k} Z_l^k$.

$$\limsup_n \frac{R_n}{n} \le \lim \frac{k + \sum_{l=0}^{n-k} Z_l^k}{n} = EZ_1^k = P(S_1 \ne S_0, S_2 \ne S_0, \cdots, S_k \ne S_0).$$

再令 $k \to \infty$, 后者收敛到 ρ. 故 $\lim_n R_n/n = \rho$.

3　渗流模型

设 $\{\xi_e; e \in E\}$ 是一族独立同分布的 Bernoulli 型的随机变量,

$$P(\xi = 1) = p = 1 - P(\xi = 0).$$

这里 E 是二维格点 Z^2 的边集合，与我们前面所学的随机过程的差异在于其参数指标具有二维结构.

如果 $\xi_e = 1$, 我们称边 e 为开边；如果 $\xi_e = 0$, 称 e 为闭边. 对于顶点 x 和 y, 如果存在一列顶点 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 使得 $x = x_0$, $y = x_n$, x_i 和 x_{i+1} 是一开边的两个端点，则称顶点 x 和 y 之间有开边相连，记为 $x \leftrightarrow y$.

$$C_x = \{y; x \leftrightarrow y\}$$

称为包含 x 的 open cluster. 如果存在 x 使得 $|C_x| = \infty$, 我们就称渗流发生了. 显然 $P(|C_x| = \infty)$ 与 x 无关，记为 $\theta(p)$. 不难证明 $\theta(p)$ 是 p 的单调函数，称

$$p_c = \inf\{p\ ; \theta(p) > 0\}$$

为临界值. 在很长时间人们只知道 $0 < p_c < 1$, 1980 年 Kesten 利用 Z^2 的自对偶性证明 $p_c = 1/2$. 这是非常罕见的结论. 如果把 Z^2 换为 Z^3 或其他一般的图，至今尚无答案.

如果我们取 E 为规则树的边集合, 每个顶点有 $d+1$ 条边, 每条边是开的概率为 p, 从某个固定的端点来看， open cluster 几乎就是 Galton-Watson 树, 平均后代数目 $m = dp$. 由分支过程的理论我们知道所以 $p_c = 1/d$. 这个结论还可以稍微在推广一些. 在 Galton-Watson 树上 Bernoulli Bond Percolation 的临界点 $p_c = 1/m$.

渗流模型本来是源于实际问题，例如找石油，封锁跑道，防毒面罩的效果，许多随机介质中的问题可以视为渗流模型.

正因如此，渗流模型有许多不同的提法. 以上介绍的概率模型称为 Bernoulli Bond Percolation on Z^2, 还可以有 site percolation, 可以是 site 和 bond 的混合模型；可以把独立随机变量换为相依的随机变量，可以是非负随机变量， first passage percolation; 可以把 Z^2 换成其他的图，甚至是随机图，例如平面上 Poisson 分布，或 Galton-Watson 树. 从更抽象的角度来看，开边全体及其 Z^2 所有顶点 $V(Z^2)$ 构成一个随机图 $G(\omega)$. 或者说这样的定义诱导了 Z^2 所有子图全体所组成空间上的一个概率测度.

渗流模型有许多难题. 例如， $\theta(p_c) = 0$?

p_u, 在树上有无穷多个无穷 open clusters

命题 9. 无穷 open cluster 是唯一的.

4　附录：常用符号

Z^d d- 维整数格点

R^d d- 维欧氏空间

$|A|$ 集合 A 的体积或测度，当 A 是有限集，表示 A 中元素个数.

$\mathcal{G}$ 图，由顶点和边组成

n, k 非负整数

Ω 样本空间

ω 样本点

S 状态空间

S_n 随机游动，一维简单随机游动

B_t 标准布朗运动， $B_0 = 0, Var(B_t) = t$

W_t 布朗运动

参考文献

[1] 钱敏平龚光鲁，应用随机过程，北京大学出版社， 1998.

[2] Rick Durrett, Essentials of Stochastic Processes, Springer, New York 1999

[3] Paul G. Hoel, Sidney C. Port & Charles J. Stone, Introduction to Stochastic Processes, Houghton Mufflin Company, Boston, 1972

[4] Kai Lai Chung, Green, Brown, and Probability & Brownian Motion on the Line, World Scientific, Singapore, 2002

[5] Sheldon M. Ross, Stochastic Processes, John Wiley & Sons, Inc. 1983, (有中译本，何声武，谢盛荣，程依明译，随机过程，中国统计出版社， 1997)