第42卷第1期
1999年1月

数 学 学 报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol.42, No. 1
Jan., 1999

# 超布朗运动与无界区域上一类非线性微分方程

任艳霞 吴 荣
(南开大学数学系 天津 300071)
杨春鹏
(郑州大学数学系 郑州 450052)

**摘 要** 本文得到了超布朗运动的一个极限定理，并用超布朗运动给出了区域 $D$ 上非线性微分方程 $-\frac{1}{2}\Delta v+\psi(v)=\rho$ 的 Dirichlet 问题与随机 Dirichlet 问题非负有界解的精确表达式.

**关键词** 超布朗运动，非线性微分方程， Dirichlet 问题，随机 Dirichlet 问题
**MR(1991) 主题分类** 60J65, 35J65, 60J80
**中图分类** O211.6

## Super-Brownian Motion and One Class of Nonlinear Differential Equations on Unbounded Domains

Ren Yanxia Wu Rong
(*Department of Mathematics, Nankai University, Tianjin* 300071, *P. R. China*)
Yang Chunpeng
(*Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou* 450052, *P. R. China*)

**Abstract** Let $\psi(x,z)=a(x)z+\gamma(x)z^{\alpha}$, where $a(x)$ and $\gamma(x)$ are positive bounded integrable functions in $D$ and $1<\alpha\leq 2$. We first establish a limit theorem of the super-Brownian motion $X$ with parameters $\left(\frac{1}{2}\Delta,\psi\right)$. Then in Section 3 and 4, we study the structure of the set of all positive bounded solutions of the differential equation $-\frac{1}{2}\Delta v+\psi(v)=\rho$ in a domain $D$ (bounded or unbounded). All positive bounded solutions with Dirichlet boundary condition or stochastic Dirichlet boundary condition are represented in terms of the super-Brownian motion $X$.

**Keywords** Super-Brownian motion, Nonlinear differential equation, Dirichlet problem, Stochastic Dirichlet problem
**MR(1991) Subject Classification** 60J65, 35J65, 60J80
**Chinese Library Classification** O211.6

## 1 引言

设 $\psi(x,z)=a(x)z+\gamma(x)z^{\alpha}$, $1<\alpha\leq 2$. 本文考虑非线性微分方程:

收稿日期： 1997-05-30, 修改日期： 1998-03-04, 接受日期： 1998-04-08
国家自然科学基金与博士点基金资助项目

$$-\frac{1}{2}\Delta v(x)+\psi(x,v(x))=\rho(x),\quad x\in D,\tag{1.1}$$

的非负解，其中 $\Delta$ 是 Lapace 算子， $D$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中一个区域，且 $a,\gamma$ 与 $\rho$ 满足条件：

(1.A) $a(x),\gamma(x),\rho(x)\in C^{0,\lambda}(D)$ 是 $D$ 上非负有界可积函数.

微分算子 $\frac{1}{2}\Delta$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中布朗运动 $\xi=(\xi_t,\Pi_x)$ 的生成算子. 设 $M$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上有限测度全体，$\mathcal{M}$ 是 $M$ 上由函数 $f_B(\mu)=\mu(B)$, $B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$ 生成的 $M$ 中的 $\sigma$- 代数. 我们用 $\langle f,\mu\rangle$ 表示 $f$ 关于 $\mu$ 的积分，用 $\tau$ 表示开集 $D$ 的首出时.

设 $X=(X_t,X_\tau,Y_\tau)$ 是具有参数 $(\frac{1}{2}\Delta,\psi)$ 的超布朗运动. 据文 [1], 对任意 $f,\rho\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d)$,

$$P_\mu\exp\{-\langle\rho,Y_\tau\rangle-\langle f,X_\tau\rangle\}=\exp\langle -v,\mu\rangle,\quad \mu\in M,\tag{1.2}$$

其中，

$$v(x)+\Pi_x\int_0^\tau\psi(\xi_s,v(\xi_s))\mathrm{d}s=\Pi_x\left[\int_0^\tau\rho(\xi_s)\mathrm{d}s+f(\xi_\tau)I_{(\tau<\infty)}\right].\tag{1.3}$$

本文中出现的 $\{D_n\}$ 是一列有界区域且满足 $\overline{D}_n\subset D_{n+1}$, $D_n\uparrow D$. 令 $\tau_n$ 表示 $D_n$ 的首出时. 在第二节我们证明对任意 $\mu\in M$, 极限 $Z_D:=\lim_{n\to\infty}\langle\Pi.(\tau=\infty),X_{\tau_n}\rangle$ 关于 $P_\mu$ 几乎处处存在，且极限不依赖于 $D_n$ 的选取.

**定义 1.1** 如果 $\varphi$ 是 $\partial D$ 上非负有界连续函数，我们称 $v$ 是 (1.1) 关于 $\varphi$ 的 Dirichlet 问题的解，如果 $v\in C^2(D)$ 满足 (1.1) 及边界条件：

$$v(x)\to\varphi(a)\quad \text{as } x\to a\in\partial D,\ x\in D.\tag{1.4}$$

**定义 1.2** 如果 $\varphi$ 是 $\partial D$ 上 Borel 可测函数， $c\in\boldsymbol{R}^1$, 我们称 $v$ 是 (1.1) 关于 $(\varphi,c)$ 的随机 Dirichlet 问题的解，如果 $v\in C^2(D)$ 满足 (1.1), 且对任意 $x\in D$,

$$\lim_{t\uparrow\tau}v(\xi_t)=\varphi(\xi_\tau)I_{(\tau<\infty)}+cI_{(\tau=\infty)},\quad \Pi_x-\text{a.s.}\tag{1.5}$$

如果 $D$ 是有界规则区域，且 $\varphi$ 是 $\partial D$ 上非负连续函数， Dynkin[1] 证明了 (1.1) 关于 $\varphi$ 的 Dirichlet 问题存在唯一有界解，且此解可表示为

$$v(x)=-\log P_{\delta_x}\exp\{-\langle\rho,Y_\tau\rangle-\langle\varphi,X_\tau\rangle\},\quad x\in D.$$

本文第三、四节将此结果推广到一般区域 $D$ 及随机 Dirichlet 问题. 特别当 $D=\boldsymbol{R}^d$、$\gamma\equiv 0$ 时，Sheu[2] 讨论了 (1.1) 所有非负解的结构.

## 2 超布朗运动的一个极限定理

对 $D$ 上非负 Borel 可测函数 $g$, 令 $G_Dg=\int_D G_D(x,y)g(y)\mathrm{d}y=\Pi_x\int_0^\tau g(\xi_t)\mathrm{d}t$, 其中 $G_D(x,y)$ 是布朗运动在 $D$ 中的格林函数.

**引理 2.1** 假设 $D$ 是格林集. 如果 $g$ 是 $D$ 上非负有界可积函数. 则

(1) $G_Dg$ 局部有界；

(2) $G_Dg\in C^{0,\lambda}(D)$;

(3) 如果 $g\in C^{0,\lambda}(D)$, 则 $G_Dg\in C^{2,\lambda}(D)$ 且在 $D$ 内

$$\frac{1}{2}\Delta G_Dg=-g.\tag{2.1}$$

**证明**　由参考文献 [3] 中定理 4.6.6 知 $G_D g$ 在 $D$ 中局部有界. 如果 $D$ 有界，由 [1] 定理 0.3 知 (2), (3) 成立. 再由布朗运动的强马氏性知 (2), (3) 对任意格林集 $D$ 成立.

**定理 2.1**　假设 $a$ 与 $\gamma$ 是 $D$ 中非负有界可积函数. 则

(1) 极限 $Z_D = \lim_{n\to\infty}\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle < \infty$ 几乎处处成立 (这里 "几乎处处" 意为 "对所有 $\mu \in M$ 关于 $P_\mu$ 几乎处处".) 且此极限不依赖于 $D_n$ 的选取；

(2) $v(x) = -\log P_{\delta_x}\exp\{-Z_D\}$ 满足

$$v(x) + G_D(\psi(v))(x) = \Pi_x(\tau=\infty), \tag{2.2}$$

这里 $\psi(v)(x) = \psi(x, v(x))$, $x \in D$;

(3) 在 $D$ 中 $P_{\delta_x}(Z_D = 0) = 1$ 的充要条件是 $D^c$ 常返.

**证明**　(1) 由 (1.2), (1.3) 得

$$P_\mu \exp\langle -\Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle = \exp\langle -v_n, \mu\rangle, \quad \mu \in M, \tag{2.3}$$

其中

$$v_n(x) + \Pi_x\int_0^{\tau_n}\psi(\xi_s v_n(\xi_s))\mathrm{d}s = \Pi_x(\Pi_{\xi_{\tau_n}}(\tau=\infty)) = \Pi_x(\tau=\infty). \tag{2.4}$$

由特殊马氏性 (参见 [4] 中 2.1.A) 可证，对任意 $\mu \in M$, $\exp\langle -\Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle$ 关于 $P_\mu$ 是有界下鞅. 由有界下鞅的收敛定理得极限 $\lim_{n\to\infty}\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle$ 关于 $P_\mu$ 几乎处处存在. 令 $Z_D = \lim\mathrm{med}\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle$. 则 $\lim_{n\to\infty}\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle = Z_D$ 几乎处处成立 (参见 [5] 附录. )

下面我们首先证明 $Z_D$ 不依赖于 $D_n$ 的选取. 设 $\{D'_n\}$ 是另一列有界区域且满足 $\overline{D}'_n \subset D'_{n+1}$, $D'_n \uparrow D$. 则对任意 $k \in N$, 存在 $n_k \in N$ 使得 $D_k \subset D'_{n_k}$. 用 $\tau'_n$ 表示 $D'_n$ 的首出时，则 $\tau_k \le \tau'_{n_k}$ 且

$$P_\mu(\exp\langle -\Pi.(\tau=\infty), X_{\tau'_{n_k}}\rangle/\mathcal{F}_{\tau_k}) = \exp\langle -v'_{n_k}, X_{\tau_k}\rangle \ge \exp\langle -\Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_k}\rangle$$

这里 $v'_n$ 满足 (2.3) 与 (2.4), 其中 $\tau_n$ 由 $\tau'_n$ 代替. 在上面不等式中令 $k\to\infty$, 由 [6] 推论 2.2.4 得，对任意 $\mu \in M$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau'_n}\rangle \le \lim_{n\to\infty}\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle, \quad P_\mu - \text{a.s.}$$

从而

$$\lim\mathrm{med}\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau'_n}\rangle \le \lim\mathrm{med}\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle, \quad \text{a.s.}.$$

类似地可得相反不等式. 所以， $Z_D$ 不依赖于 $D_n$ 的选取.

再证 $Z_D < \infty$ 几乎处处成立. 用 $\theta\Pi.(\tau=\infty)$, $\theta \ge 0$ 代替 (2.3) 与 (2.4) 式中的 $\Pi.(\tau=\infty)$ 并对这两式在 $\theta = 0$ 点求导得

$$P_\mu\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle = \langle \Pi.(\tau=\infty), \mu\rangle \le \mu(\boldsymbol{R}) < \infty.$$

由 Fatou 引理知

$$P_\mu Z_D \le \liminf_{n\to\infty} P_\mu\langle \Pi.(\tau=\infty), X_{\tau_n}\rangle < \infty,$$

从而对任意 $\mu \in M$, $Z_D < \infty$ 关于 $P_\mu$ 几乎处处成立；

(2) 由 (2.3) 知 $v_n(x) = -\log P_{\delta_x} \exp\langle -\Pi.(\tau = \infty), X_{\tau_n}\rangle$. $v_n(x)$ 关于 $n$ 递减. 假设当 $n \to \infty$ 时， $v_n(x) \downarrow v(x)$. 注意 $v_n(x) \le 1$, $x \in D_n$. 在 (2.3) 和 (2.4) 式中令 $n \to \infty$, 由引理 2.1 及有界控制收敛定理得

$$P_\mu \exp(-Z_D) = \exp\langle -v, \mu\rangle;$$
$$v(x) + \Pi_x \int_0^\tau \psi(\xi_s v(\xi_s))\mathrm{d}s = \Pi_x(\tau = \infty).$$

即结论 (2) 成立；

(3) 显然在 $D$ 中 $P_{\delta_x}(Z_D = 0) = 1$ 与 $D^c$ 常返都等价于条件： $v(x) = 0, x \in D$.

## 3 Dirichlet 问题

**引理 3.1** 假设 $D$ 是规则格林区域， $a, \gamma$ 与 $\rho$ 满足条件 (1.A), 并设 $\varphi$ 是 $\partial D$ 上非负有界连续函数. 则 $v$ 是问题 (1.1) 与 (1.4) 的有界解的充要条件是存在常数 $c \ge 0$ 使得 $v$ 为下面积分方程的非负有界解：

$$v(x) + G_D(\psi(v))(x) = G_D\rho(x) + \Pi_x(\varphi(\xi_\tau)I_{(\tau<\infty)} + cI_{(\tau=\infty)}), \quad x \in D. \tag{3.1}$$

**证明** 设 $v \ge 0$ 是问题 (1.1) 与 (1.4) 的有界解. 由文 [3] 中定理 4.6.6 与定理 4.6.7 知

$$h_n(x) := v(x) + \Pi_x \int_0^{\tau_n} \psi(\xi_s, v(\xi_s))\mathrm{d}s - \Pi_x \int_0^{\tau_n} \rho(\xi_s)\mathrm{d}s \tag{3.2}$$

是 $D_n$ 中调和函数且在边界 $\partial D_n$ 上具有值 $v$. 所以， $h_n(x) = \Pi_x v(\xi_{\tau_n})$, $h_n(x) \le \sup\limits_D |v(x)|$. 在 (3.2) 式中令 $n \to \infty$, 则极限 $h(x) := \lim_{n\to\infty} h_n(x)$, $x \in D$ 存在，且

$$h(x) = v(x) + G_D(\psi(v) - \rho)(x) \tag{3.3}$$

所以， $h$ 是 $D$ 上有界调和函数. 由文 [3] 中定理 4.6.7 可得当 $x \to a \in \partial D$, $x \in D$ 时, $h(x) \to \varphi(a)$. 再由文 [3] 中定理 4.2.12 知存在常数 $c \in \boldsymbol{R}^1$ 使得

$$h(x) = \Pi_x(\varphi(\xi_\tau)I_{(\tau<\infty)} + cI_{(\tau=\infty)}), \quad x \in D,$$

即存在 $c \in \boldsymbol{R}^1$ 使 (3.1) 成立. 用文 [3] 中命题 4.2.8 及马氏性可证 $c$ 一定非负.

相反地，如果 $v$ 是 (3.1) 的非负有界解，用文 [1] 中定理 0.2 的类似证明方法可证 $v$ 是 (1.1) 与 (1.4) 的解.

**引理 3.2** 设 $D$ 是格林区域， $g$ 是 $D$ 上非负有界可积函数. 则对 $x \in D$,

$$\lim_{t\uparrow\tau} G_D g(\xi_t) = 0, \quad \Pi_x - \text{a.s.} \tag{3.4}$$

证明略.

**定理 3.1** 在引理 3.1 的条件下我们有：

(1) 如果 $v$ 是 (1.1) 与 (1.4) 的非负有界解，则存在常数 $c \ge 0$ 使得

$$v = -\log P_{\delta_x} \exp\{\langle -\rho, Y_\tau\rangle - \langle \varphi, X_\tau\rangle - cZ_D\}; \tag{3.5}$$

(2) 若 $G_D\rho$ 在 $D$ 中有界，则对任意常数 $c \geq 0$, 由 (3.5) 式给出的 $v(x)$ 是 (1.1) 与 (1.4) 的非负有界解；

(3) 问题 (1.1) 与 (1.4) 最多存在一个非负有界解的充要条件是 $D^c$ 常返.

**证明** (1) 如果 $v$ 是 (1.1) 与 (1.4) 的非负有界解，则根据引理 3.1, 存在常数 $c \geq 0$ 使得 $v$ 满足 (3.1). 由 [1] 中定理 1.1 及最大值原理可得 $v(x) = -\log P_{\delta_x} \exp\{-\langle \rho, Y_{\tau_n}\rangle - \langle v, X_{\tau_n}\rangle\}$, 即

$$v(x) = -\log P_{\delta_x} \exp\{-\langle \rho, Y_{\tau_n}\rangle - \langle u, X_{\tau_n}\rangle - \langle c\Pi.(\tau = \infty), X_{\tau_n}\rangle\} \tag{3.6}$$

其中， $u(x) = v(x) - c\Pi.(\tau = \infty) = \Pi_x(\varphi(\xi_\tau); \tau < \infty) + G_D(\rho - \psi(v))(x)$, $x \in D$. 从而由引理 3.2 及文 [3] 中定理 5.4.9 得， $\lim_{t\uparrow\tau} u(\xi_t) = \varphi(\xi_\tau) I_{(\tau<\infty)}$, $P_\mu$-a.s.. 根据超过程 $X$ 的规则性定理 (见 [7]), 对 $x \in D$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle u, X_{\tau_n}\rangle = \langle \varphi, X_\tau\rangle, \quad P_{\delta_x} - \text{a.s.} \tag{3.7}$$

由 [1] 定理 1.7, 对 $x \in D$, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\langle \rho, Y_{\tau_n}\rangle \uparrow \langle \rho, Y_\tau\rangle, \quad P_{\delta_x} - \text{a.s.} \tag{3.8}$$

在 (3.6) 式中令 $n \to \infty$, 由 (3.7), (3.8) 和定理 2.1, 我们可得 $v$ 满足 (3.5).

(2) 设 $v$ 由 (3.5) 式给出. 令

$$h_1(x) = \Pi_x(\varphi(\xi_\tau); \tau < \infty); \quad h_2(x) = c\Pi_x(\tau = \infty). \tag{3.9}$$

由 (1.2) 与 (1.3) 我们有

$$v_n(x) = -\log P_{\delta_x} \exp\{-\langle \rho, Y_{\tau_n}\rangle - \langle (h_1 + h_2), X_{\tau_n}\rangle\}, \tag{3.10}$$

其中,

$$v_n(x) + \Pi_x \int_0^{\tau_n} (av_n + \gamma v_n^\alpha)(\xi_s)\mathrm{d}s = \Pi_x \int_0^{\tau_n} \rho(\xi_s)\mathrm{d}s + (h_1 + h_2)(x), \quad x \in D_n. \tag{3.11}$$

注意对 $x \in D$, 当 $n \to \infty$ 时， $h_1(\xi_{\tau_n}) \to \varphi(\xi_\tau) I_{(\tau<\infty)}$, $\Pi_x$-a.s. 由 $X$ 的规则性知，对 $x \in D$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle h_1, X_{\tau_n}\rangle = \langle \varphi, X_\tau\rangle, \quad P_{\delta_x} - \text{a.s.} \tag{3.12}$$

在 (3.10) 中令 $n \to \infty$, 由 (3.8), (3.12) 与定理 2.1 得 $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x)$, $x \in D$. 据 (3.11) 式， $|v_n(x)| \leq \|G_D\rho\|_\infty + \|h_1 + h_2\|_\infty < \infty$. 在 (3.11) 中令 $n \to \infty$, 根据控制收敛定理， $v$ 是 (3.1) 从而是 (1.1) 与 (1.4) 的非负有界解.

(3) 由定理 2.1(3) 知结论 (3) 显然成立.

**引理 3.3** 在引理 3.1 的条件下，假设 $d \geq 3$, $c \geq 0$, 且如果 $\partial D$ 无界， $\varphi$ 在无穷远点具有极限 $c$. 则 $v$ 是 (1.1) 与 (1.4) 在无穷远点具有极限 $c$, 即

$$\text{当 } \|x\| \to \infty,\ x \in D \text{ 时},\ v(x) \to c \tag{3.13}$$

的有界解的充要条件是 $v$ 为 (3.1) 的有界解，其中 $c$ 由上面给定.

应用文 [8] 中引理 2 与引理 3 可证. 证明略.

**定理 3.2** 在引理 3.1 的条件下，由 (3.5) 式给出的 $v(x)$ 是问题 (1.1), (1.4) 与 (3.13) 的唯一有界解.

应用引理 3.1 及定理 2.1 的类似证明方法可证，证明略.

## 4 随机 Dirichlet 问题

**定理 4.1** 设 $D$ 是格林区域， $a,\gamma$ 与 $\rho$ 满足条件 (1.A), 且 $\varphi$ 是 $\partial D$ 上非负有界 Borel 可测函数. 如果 $G_D\rho$ 在 $D$ 中有界，则由 (3.5) 式给出的 $v(x)$ 是 (1.1) 关于 $(\varphi,c)$ 的随机 Dirichlet 问题的唯一有界解.

**证明** 对 $c\geq 0$, 由定理 3.1 的证明知由 (3.5) 式给出的 $v(x)$ 是 (3.1) 的非负有界解，且由引理 3.1 的证明知 $v$ 是 (1.1) 的解. 设 $h_1,h_2$ 由 (3.9) 式定义. 根据文 [3] 定理 5.4.9, 对 $x\in D$,

$$\lim_{t\uparrow\tau}(h_1+h_2)(\xi_t)=\varphi(\xi_\tau)I_{(\tau<\infty)}+cI_{(\tau=\infty)},\quad \Pi_x-\text{a.s.}$$

据引理 3.2. 对 $x\in D$,

$$\lim_{t\uparrow\tau}G_D\rho(\xi_t)=0;\quad G_D(\psi(v))(\xi_t)=0,\quad \Pi_x-\text{a.s.}$$

所以 $v$ 满足 (1.5), 从而 $v$ 是 (1.1) 关于 $(\varphi,c)$ 的随机 Dirichlet 问题的非负有界解.

反之，若 $v$ 是 (1.1) 关于 $(\varphi,c)$ 的随机 Dirichlet 问题的非负有界解，则 $v$ 满足 (3.6) 式. 由假设条件可得，并 $t\uparrow\tau$ 时， $u(\xi_t)\to\varphi(\xi_\tau)I_{(\tau<\infty)}$, $\Pi_x$-a.s.. 在 (3.6) 式中令 $n\to\infty$, 用定理 3.1 的类似证明方法可证 $v$ 一定由 (3.5) 式给出.

## 参 考 文 献


1 Dynkin E B. A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equation. Probab Th Rel Fields, 1991, 89: 89–115

2 Sheu Y-C. On positive solutions of some nonlinear differential equations——A probabilistic approach. Stochastic Process. Appl, 1995, 59: 43–53

3 Port S C, Stone C J. Brownian motion and classical potential theory. New York: Academic Press, 1978

4 Dynkin E B. Superdiffusions and removable singularities for quasiliner partial differential equations. Comm Pure Appl Math, 1996, 49(2): 124–176

5 Dynkin E B. Path processes and historical superprocesses. Probab Th Rel Fields. 1991, 90: 1–36

6 Revuz D, Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer, 1991

7 Dynkin E B. On regularity of superprocess. Probab Th Rel Fields, 1993, 95: 263–281

8 Ren Y. Generalized first boundary value problem for Schrödinger equation. Proc Amer Math Soc, 1992, 115(4): 1101–1109